Conceptos básicos de Matemática

Recopilación de materiales

26 de mayo de 2012

Índice general

Comentarios y consideraciones

El material presentado a continuación surge como una de las tantas acciones concretas que se brindan a la generación ingresante a la Facultad. La idea reside en ofrecer unas notas con temas básicos que se encuentran en los cursos de educación media y que sirven como repaso para afrontar los cursos de matemática del primer año, por tanto el espíritu del material no busca ahondar en tantos detalles como el desarrollo meticuloso de las ideas y demostraciones de los enunciados.

Se invita a los lectores a realizar los ejercicios aquí propuestos dado que es una instancia fundamental en la apropiación del conocimiento.

Capítulo 1

Conceptos elementales del lenguaje algebraico

1.1. Conjuntos, elementos y pertenencia

En matemática se utilizan diferentes lenguajes para comunicarse, existen tres grandes categorías:
El lenguaje coloquial, el lenguaje simbólico y el lenguaje gráfico. El lenguaje coloquial se utiliza para expresar ideas y conceptos en forma escrita u oral usando el lenguaje ordinario. El lenguaje simbólico se utiliza para expresar con símbolos en forma precisa los conceptos dados en lenguaje coloquial. El lenguaje gráfico se utiliza para aclarar conceptos y situaciones. Al usar el lenguaje simbólico, usualmente utilizamos letras mayúsculas (A, B, $C, \ldots$) para designar los conjuntos y letras minúsculas (a, b, $c, \ldots$) para designar los elementos. Se considera un símbolo que relaciona un elemento con un conjunto ($\in$). Se escribe

$$a \in A$$

y se lee, *a pertenece al conjunto A*. Para indicar que un elemento no pertenece a un conjunto se escribe

$$a \notin A$$

Los símbolos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ denotan determinados conjuntos numéricos. $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.
No ahondaremos aquí en la construcción de estos conjuntos numéricos y los supondremos conocidos.

Una de las primeras interrogantes que aparecen al trabajar con conjuntos es la forma de determinarlos. Se debe indicar de una forma precisa y sin ambigüedades, cuáles son sus elementos. Se pueden distinguir varias formas, una de estas es determinar al conjunto por *extensión*, esto es, listar todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, si A es el conjunto de los números naturales mayores o iguales que 10 y menores que 20, entonces

$$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

Podemos observar que cada elemento esta separado por una coma, y los mismos se encuentran entre llaves.
Otra forma de describir un conjunto es por *comprensión*, la misma consiste en indicar una propiedad que deben cumplir sus elementos y sólo estos (para no generar ambigüedades). Consideremos B como el conjunto de los números naturales que son pares y menores que nueve, entonces

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n < 9 \text{ y } n = \dot{2}\}$$

Como última observación recordemos que el conjunto que no tiene elementos se denomina *conjunto vacío*, se lo denota usualmente $\{\ \}$ o $\varnothing$.

Ejemplo 1.1.1
Determinar los siguientes conjuntos por extensión y por comprensión:

1. A es el conjunto formado por los cuadrados de los primeros diez números naturales.

2. B es el conjunto formado por las raíces cuadradas de los primeros cincuenta naturales y que además sean naturales.

3. C es el conjunto formado por los naturales múltiplos de tres que además son menores que diecisiete o múltiplos de cinco menores que treinta.

Solución:

1. Si deseamos determinar A por extensión, debemos elevar al cuadrado cada uno de los diez primeros números naturales y el elemento obtenido pertenecerá al conjunto. Realicemos los cálculos:
   $0^2 = 0,\ 1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 16,\ 5^2 = 25,\ 6^2 = 36,\ 7^2 = 49,\ 8^2 = 64,$
   $9^2 = 81,\ 10^2 = 100$. Obtenemos entonces que $A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$.
   Ahora bien, para determinar por comprensión A, debemos indicar que propiedad cumplen sus elementos. $A = \{x : x = n^2,\ n \in \mathbb{N},\ n \leq 10\}$

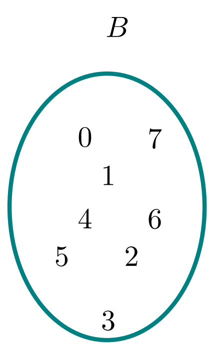
2. Para determinar por extensión este conjunto podríamos probar aplicar raíz cuadrada a cada número entre 0 y 50 y ver si el resultado es un número natural. Luego de algunos cálculos obtenemos que $B = \{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$.
   Para expresar B por comprensión indicamos las propiedades que se deben cumplir: $B = \{x \in \mathbb{N} : x = \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}, n \leq 50\}$.

3. Al determinar C debemos tener en cuenta las dos condiciones, la primera es ser *múltiplo de tres menor que diecisiete*, la segunda es ser *múltiplo de cinco y menor que treinta*. Entonces $C = \{3, 6, 9, 12, 15, 5, 10, 20, 25\}$. Determinemos C por comprensión:

$$C = \{x : x = 3n,\ n \leq 5, n \in \mathbb{N} \text{ o } x = 5m,\ m \leq 5,\ m \in \mathbb{N}\}$$

   Mas adelante veremos una forma mas sencilla de determinar este conjunto teniendo en cuenta las *operaciones entre conjuntos*.

Observación: Al determinar un conjunto por extensión, el orden en el cual aparecen los elementos no tiene importancia y si los elementos son repetidos, se cuentan una vez sola. A modo de ejemplo si escribimos $T = \{1, 2, 3, 2, 3\}$, en realidad se considera $T = \{1, 2, 3\}$. Veamos ahora una representación en modo gráfico de los conjuntos, es claro que en ciertos casos manejar diferentes registros ayuda a la comprensión de la situación.
Los conjuntos pueden representarse gráficamente utilizando diagramas de Venn, la idea es bastante simple y conocida,



denota el conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
Veamos algunas relaciones básicas.

Definición 1.1.1
Sean A y B dos conjuntos, se dice que A esta incluido en B o que A es un subconjunto de B y se denota $A \subset B$ si todo elemento que pertenece al conjunto A también pertenece al conjunto B.

En lenguaje simbólico:

$$A \subset B \text{ si } \forall\, x \,/\, x \in A \Rightarrow x \in B$$

La concatenación de símbolos ($\forall\, x \,/\, x \in A$) se leen como "*para todo elemento x perteneciente al conjunto A*"
Decir que dos conjuntos son iguales ($A = B$), es decir que tienen los mismos elementos, por tanto todo elemento de A debe pertenecer a B y asimismo, todo elemento de B debe pertenecer a A. En resumidas cuentas, $A = B$ si $A \subset B$ y $B \subset A$.
En el caso que $A \subset B$ pero $A \neq B$ se dice que A esta incluido estrictamente en B o que A es un subconjunto propio de B y se denota $A \subsetneq B$. En este caso todo elemento del conjunto A pertenece al conjunto B, pero existe al menos un elemento b que pertenece al conjunto B tal que este no pertenece al conjunto A. En símbolos

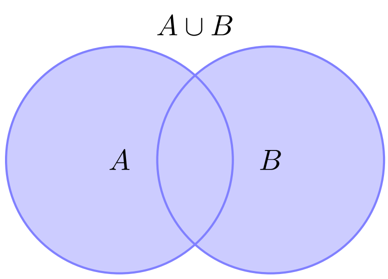
$$A \subsetneq B \textbf{ si } \forall\, a \in A \Rightarrow a \in B \text{ y } \exists\, b \in B \,/\, b \notin A$$

1.1.1. Operaciones con Conjuntos

Unión de Conjuntos
Sean A y B dos conjuntos, la unión de A y B es un nuevo conjunto cuyos elementos pertenecen a A o pertenecen a B. En símbolos matemáticos este concepto se expresa de la siguiente manera

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Y su representación con diagramas de Venn es



Ejemplo 1.1.2
Sean $A = \{1, 5, 7, 14, 22, 31, 33\}$ y $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 20, 22, 30\}$.
Entonces $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 14, 20, 22, 30, 31, 33\}$.

Ejemplo 1.1.3

Consideremos los siguientes conjuntos, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Entonces $A \cup A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = B \cup A$. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = A \cup B$.

-

Proposición 1 (Propiedades de la Unión de Conjuntos)

Sean A y B dos conjuntos. Entonces:

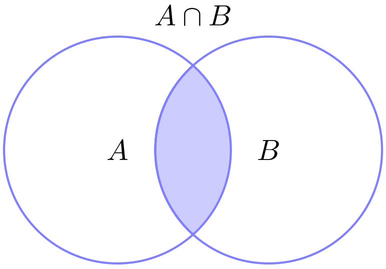
1. $A \cup A = A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup \varnothing = A$
4. $A \subset A \cup B$
5. $B \subset A \Leftrightarrow B \cup A = A$.

Intersección de Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos, la intersección de A y B es un nuevo conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B. En símbolos matemáticos

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Y su representación usual con diagramas de Venn es



Ejemplo 1.1.4

Sean $A = \{1, 5, 7, 14, 22, 31, 33\}$ y $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 20, 22, 30\}$.
Entonces $A \cap B = \{5, 7, 22\}$.

Ejemplo 1.1.5
Consideremos $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. $A \cap A = A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} \cap A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} = A$. $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} \cap \{2, 3, 4, 5, 7, 9\} = \{2, 3, 4\} = B \cap A$. $A \cap B = \{2, 3, 4\} \subset \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

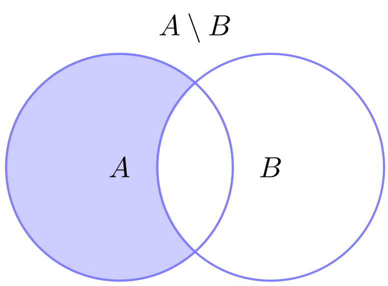
Proposición 2 (Propiedades de la intersección de conjuntos)
Sean A y B conjuntos. Entonces:

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap \varnothing = \varnothing$
4. $A \cap B \subset A$
5. $B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$.

Diferencia de Conjuntos
Sean A y B dos conjuntos, se llama diferencia de A y B al conjunto que tiene como elementos los que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B.
Simbólicamente se denota

$$A \setminus B = \{x \ / \ x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Es usual escribir también $A - B$ para notar $A \setminus B$.



Ejercicio 1
Determinar si es cierto que si A y B son dos conjuntos, se cumple que $A \setminus B = B \setminus A$.

Observación: Para determinar si una cierta propiedad es falsa, basta encontrar un caso en que no sea cierta. Esto se conoce como "contraejemplo" y es muy utilizado en matemática. Tener en cuenta esto para el ejercicio anterior.

Proposición 3 (Propiedades de la Diferencia de Conjuntos)
Sean A, B y C conjuntos. Entonces:

1. $A \setminus A = \varnothing$
2. $A \setminus \varnothing = A$
3. $\varnothing \setminus A = \varnothing$.
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Complemento
Si $A \subset B$ se define el complemento de A respecto de B como el conjunto cuyos elementos pertenecen a B y no pertenecen a A. Simbólicamente se anota $A^c_B = \{x : x \in B \text{ y } x \notin A\}$. Observar que el subíndice indica el conjunto respecto del cual se complementa.

Observación: Si no se indica el conjunto respecto al cual se complementa entonces $B^c = \{x : x \notin B\}$ quedando implícito el conjunto universal al cual pertenecen los elementos.

Ejercicio 2

1. De tres conjuntos se sabe que $A \cup C = \{n \in \mathbb{N} \;/\; n < 9 \text{ y } n \neq 6\}$, $B \cup C = \{2, 5, 7, 8, 9\}$ $B \cap C = \{5, 7\}$, $A \cap C = \{2\}$ y $C \setminus (B \cup A) = \{8\}$.
   Hallar A, B y C.

2. Dados $B = \{x \in \mathbb{N} \;/\; 2 \text{ divide } x \text{ y } 3 < x < 9\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x < 9\}$.
   Hallar todos los conjuntos D que verifican simultáneamente $D \subset C$, $\{6, 7\} \subset D$ y $B \cap D = \{6, 8\}$.

3. Considerar los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$, $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones justificando la respuesta

a) $A = B$
b) $A \subset B$
c) $A \subset C$
d) $A \in C$
e) $A \subset D$
f) $B \subset C$
g) $B \subset D$
h) $B \in D$
i) $A \in D$

4. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq x \leq 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq x \leq 4\}$.
Hallar los conjuntos C tales que $A \subset C \subset B$.

5. Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 8\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 6\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 4\}$.
Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta.

a) $3 \notin C$
b) Si $x \in A \Rightarrow x \leq 5$
c) Si $x \leq 8 \Rightarrow x \in B$
d) Si $x \in B \Rightarrow x \geq 2$
e) $C \subset D$
f) $D \subset A$
g) $A \cap B = C$
h) $B \cap C = B$

6. Se le realizó a un grupo de 43 estudiantes un cuestionario que contenía las siguientes preguntas:
¿repite?, ¿tiene previas?, ¿posee todos los textos recomendados? Se obtuvieron los siguientes datos:

a) 12 estudiantes repiten
b) 15 estudiantes poseen todos los textos
c) 6 estudiantes repiten y tienen los textos
d) 17 respondieron negativamente a las tres preguntas
e) 1 estudiante respondió afirmativamente a las tres preguntas
f) 10 respondieron afirmativamente a solo dos preguntas
g) 15 estudiantes respondieron afirmativamente solo a una pregunta

(i) De los estudiantes que no repiten ni tienen todos los textos, ¿cuántos tienen previas?
(ii) De todo el grupo, ¿cuántos tienen previas?

Propiedad de las Operaciones con los números reales

A continuación presentaremos algunas propiedades de las operaciones de los números reales.

Propiedad Conmutativa

Suma: $a + b = b + a, \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}$.

Producto: $a \cdot b = b \cdot a, \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}$.

Propiedad Asociativa

Suma: $(a + b) + c = a + (b + c), \ \forall \ a, b, c \in \mathbb{R}$.

Producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \ \forall \ a, b, c \in \mathbb{R}$.

Existencia de Opuesto

$\forall \ x \in \mathbb{R}, \ \exists \ x' \in \mathbb{R}$ tal que $x + x' = 0$. Usualmente se lo denota $x' = -x$. El número cero es el elemento neutro de la suma.

Existencia de Inverso

$\forall \ x \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq 0 \ \exists \ \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$. Este se dice inverso y al 1 se le llama elemento neutro del producto.

Propiedades Distributivas

a) Del producto respecto a la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall \ a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) De la potencia respecto al producto: $(a \cdot b)^n = a^n b^n, \forall \ a, b \in \mathbb{R}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

c) De la potencia respecto al cociente: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

d) Radicación respecto al producto:

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}, \forall \ n \in \mathbb{N}$, tal que n es impar.

2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, si $n \in \mathbb{N}$ tal que n es par.

e) Radicación respecto al cociente:

1) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}, \ b \neq 0, \ n \in \mathbb{N}$ con n impar.

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq 0, b > 0, \ n \in \mathbb{N}$ con n par.

f) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \ \forall \ a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \ \forall \ m, n \in \mathbb{N}$.

Propiedad del producto y cociente de potencias

a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \ \forall \ a \in \mathbb{R}, \ \forall \ m, n \in \mathbb{N}$.

b) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \ \forall \ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ \forall \ m, n \in \mathbb{N}$.

Propiedad de potencia de potencia

a) $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

Recordar además que:

- $a^1 = a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.
- $a^0 = 1$, $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $1^a = 1$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.
- $0^a = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^+$.
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot b = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$.

Otras propiedades

Diferencia de cuadrados:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Esto significa que la diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de estos términos.

Cuadrado de un binomio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{y} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

La primer expresión se lee como, el cuadrado de una suma de dos números es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término.

1.2. Expresiones algebraicas

1.2.1. Introducción

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, intentemos realizar las siguientes actividades:

Expresar las siguientes situaciones en lenguaje simbólico y reducirlas en caso de ser posible:

1. Un tercio de quince veces veinte.

2. La raíz cuadrada de ocho mas la mitad de treinta.

3. La raíz cuadrada de la suma del cuadrado de ocho y el cuadrado de seis.

4. La tercera parte de diez, mas la raíz cuadrada de ciento cuarenta y cuatro.

5. El cubo de la suma de un medio y dos.

6. La raíz cuadrada del doble de cuatro a la cuarta.

7. La suma de ocho y su consecutivo por la diferencia entre ellos.

8. La raíz cuadrada de cien por la raíz cuadrada de diez mil.

9. El producto de dos a la quinta por el cociente entre dos y tres.

Siendo x e y números cualesquiera, escribir en símbolos:

1. Un tercio de x.

2. El triple de x.

3. x a la cuarta.

4. El cuadrado de x, más el producto del doble de x e y, más el cuadrado de y.

5. El producto de la diferencia entre x e y y la suma de x e y.

6. Un quinto de la raíz cuadrada de x.

7. La raíz cuadrada de un quinto de x.

8. El cociente entre x y la raíz cuadrada de 5.

1.2.2. Operatoria con expresiones algebraicas

Tomemos por ejemplo la siguiente expresión algebraica

$$-2m - 3p + 5mp$$

Cada una está formada por una parte literal y por un coeficiente, por ejemplo $-2m$ tiene coeficiente -2 y parte literal m.

Términos semejantes: Son aquellos que tienen la misma parte literal. Por ejemplo, identifiquemos términos semejantes en las siguientes expresiones algebraicas.

1. $-6x^2$ y $3x^2$ son semejantes dado que tienen igual parte literal x^2.
2. $\frac{1}{2}x$ y $3x^3$ no son semejantes.
3. $9z$ y $8z$ son semejantes y $-6z^2$ no es semejante a ninguno de los anteriores.
4. $7xz$ es semejante a $\dfrac{3}{2}xz$.

Ejercicio 3
Indicar cuáles de los siguientes términos son semejantes:

1. $a^2,\ ax,\ 2a^2,\ a^2x,\ \dfrac{7}{2}ax$

Sumas algebraicas: para sumar o restar dos expresiones algebraicas, se suman sus términos semejantes.
En el ciclo de educación media se trabaja en la reducción de expresiones algebraicas, para ello es necesario poder operar con los términos que aparecen en la expresión. Varios de estos procedimientos que han sido trabajados se justifican con propiedades matemáticas conocidas.

Ejemplo 1.2.1
Se considera la siguiente expresión:

$$8xy + 6xy - 13xy$$

Observamos que estos términos son todos semejantes dado que tienen xy como parte literal. Se puede pensar también que xy es un factor común en los términos de la expresión y luego, utilizando la propiedad distributiva es posible factorizarla, es decir, puede escribirse de la forma

$$(8 + 6 - 13)xy = xy.$$

Si se tiene ahora una expresión cuyos términos no son todos semejantes, es necesario identificar que términos si los son para poder reducirlos,

$$\begin{aligned} 8m^2 - 2mp - 3m^2 + mp &= (8-3)m^2 + (-2+1)mp \\ &= 5m^2 - mp \end{aligned}$$

Ejercicio 4
Reducir si es posible las siguientes expresiones algebraicas:

1. $\frac{2}{3}a - \frac{1}{5}ab + 2ab - a$
2. $-6x^5 + 10x^2 + \frac{3}{2}x^2 + x^5 + 10$
3. $-2x + x^3 - pq$
4. $\frac{3}{5}a^2 + \frac{1}{3}b - \frac{3}{10}a^2 + \frac{5}{6}b$
5. $3xy + 2y^2 - 5xy + x - 7y^2$
6. $-2z + 0,2z^2y + 3y - 0,6yz^2 + \frac{1}{2}z - 0,9y$

Multiplicación de términos
A la hora de multiplicar expresiones algebraicas se tiene que $(-3a)\cdot(6m) = -18\cdot a\cdot m$, $(7x^2+m)\cdot(2x) = 14x^3 + 2mx$

Propiedad distributiva en expresiones algebraicas
La propiedad distributiva es una herramienta muy importante en el trabajo con expresiones algebraicas. Si k, a, b representan tres números reales, entonces

$$k(a+b) = ka + kb.$$

Consideremos por ejemplo $5x(3x+2a)$, observemos que estos términos dentro del paréntesis no son semejantes por lo que no es posible sumarlos, utilizando la propiedad distributiva y desarrollando el producto obtenemos

$$\begin{aligned} 5x(3x+2a) &= 5x3x + 5x2a \\ &= 15x^2 + 10xa \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene una expresión algebraica que es suma de dos monomios.

Ejemplo 1.2.2
Desarrollar las siguientes expresiones algebraicas:

1. $3m^2(6m - 7a) =$
2. $(\frac{1}{3}x^2 + 17x)6x^2 =$
3. $(7x + 6y) \cdot (-7x^2 + 2) =$

En este último caso tenemos el producto de dos binomios. Para desarrollar este producto también utilizamos la propiedad distributiva.

1.2.3. Ecuaciones con expresiones algebraicas

Definición 1.2.1
Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

En el caso de trabajar con expresiones en una indeterminada y llamando $A(x)$ y $B(x)$ a dichas expresiones, una ecuación queda expresada como $A(x) = B(x)$.

Expresiones equivalentes
La idea intuitiva de trabajar con expresiones equivalentes consiste en transformar expresiones en otras que sean mas simples.
Esta idea se trabaja bastante al considerar fracciones equivalentes. Por ejemplo, son equivalentes las fracciones

$$\frac{36}{120} = \frac{18}{60} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

En este caso obtenemos como última expresión una fracción que es irreducible.

Al trabajar con ecuaciones, se dice que dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución. Por tanto la ecuación $A(x) = B(x)$ es equivalente a la ecuación $A(x) - B(x) = 0$.
Veamos entonces los principios básicos de las equivalencias entre ecuaciones.

Proposición 4 (Transformaciones equivalentes)

1. **Principio de adición:** *Si a ambos miembros de una ecuación se le suma o resta un número real o una expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.*

$$A(x) = B(x) \text{ es equivalente a } A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$$

2. **Homogeneidad:** *Si se multiplican ambos miembros de una ecuación por un número real $\lambda \neq 0$ se obtiene una ecuación equivalente a la dada.*

$$A(x) = B(x) \text{ es equivalente con } \lambda \cdot A(x) = \lambda \cdot B(x)$$

Al trabajar con ecuaciones que involucren expresiones algebraicas, debemos tener en consideración el conjunto de números reales para el cual se pueden realizar las operaciones con las que se esta trabajando. Por ejemplo, al trabajar con cocientes, debemos tener en cuenta que no podemos dividir entre cero, y por tanto si existe algún número el cual si se sustituye por las incógnitas, da como resultado cero, para este número no se puede realizar la operación.

Ejemplo 1.2.3
Se considera la expresión

$$\frac{6}{x-1}$$

Si deseamos sustituir x por un número real, debemos tener en cuenta que el denominador no puede se cero, por tanto $x \neq 1$ y el conjunto donde la expresión esta definida es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Al subconjunto de $\mathbb{R}$ para el cual tiene sentido la expresión se le suele llamar *"conjunto de existencia"*

Veamos entonces como trabajar con expresiones algebraicas equivalentes que son cocientes de polinomios, y el conjunto donde tiene sentido dicha equivalencia.

Ejemplo 1.2.4
Determinar la expresión irreducible de

$$\frac{4x^2-4}{2x+2}$$

En primera instancia debemos hallar el subconjunto de los números reales donde dicha expresión tiene sentido. Tenemos que ver cuando el denominador es diferente de cero, es decir

$2x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq -2 \Leftrightarrow x \neq -1$. Por tanto el conjunto donde esta definida la expresión es $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Ahora bien, buscamos expresiones equivalentes a

$$\begin{aligned} \frac{4x^2-4}{2x+2} &= \frac{4(x^2-1)}{2(x+1)} \\ &= \frac{4(x-1)\cdot(x+1)}{2(x+1)} \\ &= 2(x-1) \end{aligned}$$

En la última igualdad podemos simplificar los factores del numerador y del denominador dado que en el conjunto donde estamos considerando dicha expresión, el denominador es diferente de cero.
Por tanto la expresión $\dfrac{4x^2-4}{2x+2}$ es equivalente a la expresión $2(x-1)$ en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Retomaremos estas ideas mas adelante.

Ecuaciones e inecuaciones con expresiones polinómicas

Al considerar ecuaciones algebraicas debemos tener en cuenta varias cosas; primero, resolver una ecuación algebraica implica determinar un conjunto solución, es este caso un subconjunto de los números reales tal que cada elemento verifica la ecuación. Además, que un elemento verifique o satisfaga una ecuación significa que al sustituir ese elemento por la incógnita, se cumple la igualdad.
Veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 1.2.5
Resolver en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación:

$$2x + 7 = 2$$

Las transformaciones de ecuaciones a ecuaciones equivalentes se da por medio de operaciones efectuadas a la ecuación, como mencionamos en la Proposición 4

Solución:

$$\begin{array}{rcll} 2x+7 & = & 2 & \Leftrightarrow \\ 2x+7-7 & = & 2-7 & \Leftrightarrow \\ 2x & = & -5 & \Leftrightarrow \\ \dfrac{2x}{2} & = & \dfrac{-5}{2} & \Leftrightarrow \\ x & = & \dfrac{-5}{2} & \end{array}$$

Por tanto la ecuación $2x+7=2$ y la ecuación $x=\frac{-5}{2}$ son equivalentes y tienen el mismo conjunto solución, además el conjunto solución de $x=\frac{-5}{2}$ se encuentra inmediatamente: $S=\{\frac{-5}{2}\}$.

Ejemplo 1.2.6

Resolver en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación:

$$-5x+2=3x+10$$

Solución:

$$\begin{array}{rcl} -5x+2=3x+10 & \Leftrightarrow & -5x+2-2=3x+10-2 \Leftrightarrow \\ -5x=3x+8 & \Leftrightarrow & -5x-3x=3x-3x+8 \Leftrightarrow \\ -8x=8 & \Leftrightarrow & \dfrac{-8x}{-8}=\dfrac{8}{-8} \Leftrightarrow \\ x=-1 & & \end{array}$$

Entonces el conjunto solución es $\{-1\}$.

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Recordemos ahora como resolver ecuaciones de segundo grado. Pretendemos llegar a a resolver una ecuación de la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

Veamos primero algunos casos sencillos:

Ejemplo 1.2.7

Consideremos en $\mathbb{R}$ la ecuación $x^2-1=0$, es decir, estamos buscando los números tales que al elevarlos al cuadrado y luego restarles 1 nos de 0. Pensemos en una ecuación equivalente de la forma $x^2 = 1$, de esta manera aplicando raíz cuadrada a ambos miembros obtenemos que $|x| = \sqrt{1}$ (no es una transformación elemental) o equivalentemente $x = \pm\sqrt{1}$ y por tanto $S = \{-1, 1\}$

Veamos un caso en el que no hay solución:

Ejemplo 1.2.8
Tratemos de resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$, es decir buscamos los números reales tales que su cuadrado mas 1 de cero. Podemos observar que $x^2 \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ y por tanto sumando 1 a ambos miembros de la desigualdad, $x^2 + 1 \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ con lo que no existe un número real que verifique esta ecuación.
Veamos una forma de intentar resolver la ecuación mediante ecuaciones equivalentes:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ x^2 &= -1 \Leftrightarrow \\ x &= \pm\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Obtenemos entonces la ecuación equivalente $x = \pm\sqrt{-1}$ y esta no tiene solución en $\mathbb{R}$ dado que no existe la raíz cuadrada de un número negativo, con lo que $S = \varnothing$.

Ejemplo 1.2.9
Consideremos la ecuación $ax^2 + c = 0$ donde $a, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.
Tratemos de resolverla:

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \Leftrightarrow \\ ax^2 &= -c \Leftrightarrow \\ x^2 &= \frac{-c}{a} \Leftrightarrow \qquad \text{si } -\frac{c}{a} \geq 0 \\ x &= \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{aligned}$$

por tanto la solución es el conjunto $S = \{-\sqrt{\frac{-c}{a}}, \sqrt{\frac{-c}{a}}\}$.

Ejemplo 1.2.10
Nos ocuparemos ahora del caso

$$ax^2 + bx = 0, \;\; a, b \in \mathbb{R},\; a \neq 0$$

En este caso no tenemos término independiente y por tanto podemos extraer un factor común x:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \Leftrightarrow \\ x(ax+b) &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos entonces un producto de expresiones igualado a cero, que en $\mathbb{R}$ implica que para que esto se cumpla, alguno de los factores debe ser cero. Entonces $x = 0$ o $ax + b = 0$ y la solución que se obtiene es $\{0, \frac{-b}{a}\}$.

Por último veamos el caso general, que consiste en resolver una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Ejemplo 1.2.11

Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Solución: El método presentado a continuación es bien ingenioso y reside en la idea de completar el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ ax^2 + bx &= -c && \overset{\times(4a)}{\Leftrightarrow} \\ 4a^2x^2 + 4abx &= 4a(-c) && \overset{+(b^2)}{\Leftrightarrow} \\ \underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{(2ax+b)^2} &= b^2 - 4ac \\ (2ax+b)^2 &= b^2 - 4ac \\ 2ax + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\ 2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

EL conjunto solución hallado depende de $b^2 - 4ac$ al que nombraremos Δ:

1. Si $\Delta > 0$ entonces se obtienen dos soluciones distintas $\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2. Si $\Delta = 0$ se obtiene una sola solución $\gamma = \dfrac{-b}{2a}$

3. Si $\Delta < 0$ no existe solución en $\mathbb{R}$.

Ejercicio: Justificar la discusión anterior.

Ejemplo 1.2.12
Veamos a continuación varios ejemplos de lo anteriormente mencionado:

1. Resolver en $\mathbb{R}$
$$-x^2 + x + 2 = 0$$
Aquí identificamos entonces $a = -1,\ b = 1,\ c = 2$ y aplicamos la fórmula anterior, con lo que se obtiene
$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(-1)2}}{2(-1)}$$
Operando obtenemos $\alpha = \frac{-1+3}{-2} = -1$ y $\beta = \frac{-1-3}{-2} = 2$.
Por tanto $\{-1, 2\}$ es el conjunto solución.

2. Resolver en $\mathbb{R}$
$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$
Tenemos $a = 2,\ b = -12,\ c = 18 \Rightarrow$
$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(2)(18)}}{2(2)}$$
Observar que en este caso $\Delta = 0$ con lo que $\alpha = \frac{-(-12)}{4} = 3$ es solución de la ecuación y su conjunto solución es $\{3\}$.

3. Resolver en $\mathbb{R}$
$$6x^2 - 3x + 2 = 0$$
Tenemos $a = 6,\ b = -3,\ c = 2 \Rightarrow$
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(6)(2)}}{2(6)}$$
Observar que en este caso $\Delta < 0$ y por tanto no existe solución en $\mathbb{R}$ ($S = \varnothing$).

Observación: Si tenemos una ecuación de la forma $a'x^2 + b'x + c' = dx^2 + ex + f$ se puede transformar en una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. ¿Cómo haríamos esto? Los detalles quedan como ejercicio.

Ejercicio 5

Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones y expresarlas de forma factorizada si es posible:

1. $x^2 - 9 = 0$
2. $2x^2 - 50 = 0$
3. $x^2 - 7x = 0$
4. $6x^2 + 36x = 0$
5. $-9x^2 = -20$
6. $-2x^2 = 8x$
7. $2x^2 - 2x - 4 = 0$
8. $-x^2 - \frac{7}{2}x + 2 = 0$
9. $3x^2 + 6x = 2x - 8$
10. $-x^2 + 2x - 1 = -2x^2 + x - 3$
11. $x^2 + 6x - 1 = (x - 1)(x + 7)$
12. $x^2 - \frac{7}{2}x + 2 = 10x^2 - \frac{3}{2}x - 1$

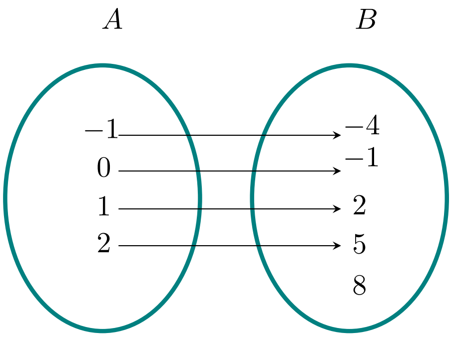
Capítulo 2

Conceptos elementales de funciones

Si A y B son dos conjuntos, una función de A en B, escrita $f : A \to B$ asocia a cada elemento $x \in A$ un único elemento, denotado $f(x) \in B$. El elemento $f(x)$ se llama imagen de x por f y x se llama preimgen de $f(x)$.
Si $f : A \to B$, entonces A se dice que es el dominio de f, B se dice que es el codominio de f y el conjunto $\{f(x) : x \in A\}$ cuyos elementos son las imágenes por f de todos los elementos de A se llama conjunto imagen; usualmente denotado $\mathrm{Im}(f)$. Es también usual que la forma de asociar elementos del dominio con elementos del codominio se haga mediante fórmulas. La misma recibe el nombre de regla de asignación.
Observar que para que dos funciones sean iguales no basta con que las reglas de asignación sean iguales, sino que tanto el dominio como el codominio deben serlo. Si $f : A \to B$ y $g : A' \to B'$ son tal que $f = g$, entonces $A = A', B = B'$ y $f(x) = g(x),\ \forall x \in A$.
Recíprocamente, si $A = A',\ B = B'$ y $f(x) = g(x),\ \forall\, x \in A$, entonces $f = g$.

Ejemplo 2.0.13
Sea $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{-4, -1, 2, 5, 8\}$ dos conjuntos, en donde los elementos de A están relacionados con los elementos de B, mediante la fórmula $y = 3x - 1$, con $x \in A$ e $y \in B$. Una representación gráfica se muestra en la Figura 2.0.13.

Ejemplo 2.0.14
Tomemos $A = [-10, 10]$ y $B = \mathbb{R}$. Sea $f : A \to B$ la función que asigna a cada elemento $x \in A$ el elemento $x^2 + 1 \in B$, esto es tal que su regla de asignación es$f(x) = x^2 + 1$.



Hallemos $\text{Im}(f)$:
Observar que como $x^2 \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, en particular esto se cumple en $A = [-10, 10]$. Entonces $x^2 + 1 \geq 1$ y si tomamos $x = 0$ se tiene $f(0) = 1$. Por otro lado, el valor máximo que puede tomar $f(x)$ es $f(10) = f(-10) = 101$.
Hasta ahora tenemos que $\text{Im}(f) \subset [1, 101]$, se nos plantea el problema de determinar si la inclusión es estricta o se cumple la igualdad. Si la igualdad fuera estricta, existe al menos un elemento del intervalo $[1, 101]$ que no tiene preimagen. Veamos que sucede:
Sea $y \in [1, 101]$, $y \in \text{Im}(f)$ si $\exists\, x \in [-10, 10]$ tal que $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y - 1}$, ahora bien, $1 \leq y \leq 101 \Leftrightarrow 0 \leq y - 1 \leq 100 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{y - 1} \leq 10$. Por tanto y tiene al menos una preimagen, el número $\sqrt{y - 1} \in [-10, 10]$ concluyendo que $\text{Im}(f) = [1, 101]$.

Queda como ejercicio determinar $f(S)$ y $f^{-1}(R)$ siendo $S = [2, 5]$ y $R = [82, 101]$

Ejemplo 2.0.15
Consideremos las funciones:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = x^2$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; g(x) = \frac{(2x)^2}{4}$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \;/\; h(x) = x^2$

Aquí es claro que las funciones f y g son iguales, mientras que las funciones f y h no lo son ya que su codominio no es el mismo (este punto será más fácil de entender cuando repasemos la inyectividad y sobreyectividad de funciones).

2.1. Inyectividad y Sobreyectividad.

Pasamos ahora a estudiar algunas características de las funciones,

Definición 2.1.1 (Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva)
Sea $f : A \to B$

- *Decimos que* f *es inyectiva si*

$$\forall\, x,\, y\, \in A\,;\ \textit{si}\ f(x) = f(y)\ \ \textit{implica que}\ x = y.$$

- *Decimos que* f *es sobreyectiva si*

$$\forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A\ /\ f(x) = y.$$

- *Decimos que una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

Observación: Es condición necesaria y suficiente para que una función $f : A \to B$ sea inyectiva, que se cumpla el contra recíproco de la definición anterior. Es decir, $f : A \to B$ es inyectiva, si y sólo si

$$\forall\, x,\, y\, \in A,\ \text{con}\ x \neq y, \text{ se cumple que } f(x) \neq f(y).$$

Ejemplo 2.1.1
Consideremos las siguientes funciones:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $f(x) = x^2$.
3. $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2$.
4. $i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $i(x) = x^2$.

Se puede ver de inmediato que se trata de cuarto funciones distintas.

La función f no es ni inyectiva ni sobreyectiva ya que $f(-1) = f(1) = 1$ y de aquí que no es inyectiva, además $f(x) = x^2 \geq 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$, de aquí que no existe ningún elemento en el dominio de f tal que su correspondiente sea, por ejemplo, -2. Así la función f tampoco es sobreyectiva.

La función g no es inyectiva por el mismo motivo que f no lo es. Sin embargo, g es sobreyectiva ya que si $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces existe su raíz cuadrada, tomando $x = \sqrt{y}$ tenemos que $g(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$.

La función h es inyectiva, verifiquemos esto:
Si $x,\, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces tenemos que $f(x) = f(y)$ implica que $x^2 = y^2$, tomando raíz cuadrada tenemos que $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$, es decir, $|x| = |y|$, pero como $x,\, y \geq 0$ tenemos que $|x| = x$ e $|y| = y$, de donde concluimos que $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$. Por el mismo motivo que f, h no es sobreyectiva.

Utilizando las mismas herramientas que utilizamos con las funciones f, g y h es inmediato verificar que i es una función inyectiva y sobreyectiva, es decir, biyectiva.

Observación: Queda totalmente aclarado, que si dos funciones tienen distinto codominio, no pueden ser iguales. Por ejemplo, las funciones f y g anteriores sólo difieren en su codominio, pero g es sobreyectiva y f no. De igual modo, si dos funciones tienen distinto dominio, no son iguales.

2.2. Imagen y Preimagen

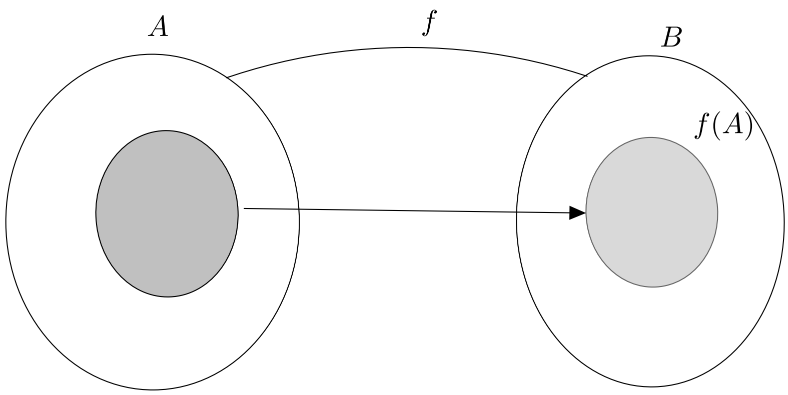
Retomemos las ideas sobre la imagen y preimagen del principio de la sección.

Definición 2.2.1 (Conjunto Imagen)
Dada una función $f : A \to B$ y un conjunto X; $X \subset A$, llamamos **imagen** *de X por f al*

conjunto

$$f(X) = \{f(x) \ / \ x \in X\} = \{y \in B \ / \ y = f(x), x \in X\}.$$

Aprovechemos la definición anterior, para definir el **recorrido de una función**, éste lo definimos como la imagen del dominio, es decir, si $f : A \to B$ entonces el **recorrido** de f es $f(A)$.



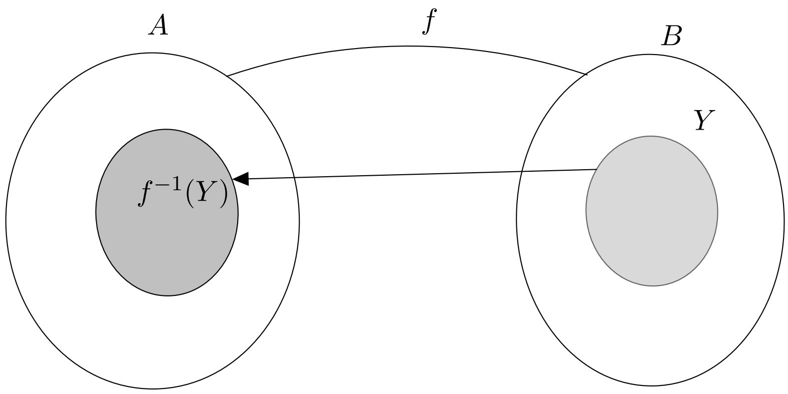
Definición 2.2.2 (Conjunto preimagen)
Consideremos una función $f : A \to B$ y un conjunto Y; $Y \subset B$, llamamos preimagen de Y por f al conjunto

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \ / \ f(x) \in Y\}.$$

Nuevamente aquí puede surgir una duda que más vale no tenerla. Al anotar al conjunto preimagen de Y con $f^{-1}(Y)$, para nada estamos hablando de la función inversa de f, es más, hasta el momento no sabemos que significa “función inversa”. Al anotar $f^{-1}(Y)$ hay que remitirse a la definición, o sea: $f^{-1}(Y) = \{x \in A \ / \ f(x) \in Y\}$. Ver Figura

Demos algún ejemplo de conjunto preimagen.

Ejemplo 2.2.1
Consideremos las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ y $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = sen(x)$. Hallemos el conjunto preimagen del conjunto $\mathbb{Z}$ por f y el conjunto preimagen del conjunto $\mathbb{R}^+$ por g. $f^{-1}(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}$ ya que $f(x) = 1 \in \mathbb{Z} \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Mientras que $g^{-1}(\mathbb{R}^+) = \{x \in [0, 2\pi] \ / \ sen(x) \in \mathbb{R}^+\} = (0, \pi)$ ya que $sen(0) = sen(\pi) = sen(2\pi) = 0$ y



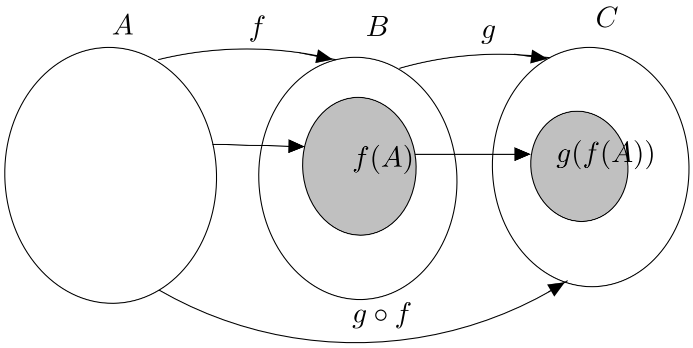
$sen(x) < 0$ si $x \in (\pi, 2\pi)$.

2.3. Composición

Definición 2.3.1 (Función compuesta)
Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$, tal que $f(A) \subset C$, definimos la función compuesta de f con g, a la que anotamos $g \circ f$, mediante:

$$g \circ f : A \to D \ \text{ tal que } \ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \ \forall \, x \in A.$$

Es bueno notar, que si bien, al hacer la composición de f con g, no son necesariamente utilizados todos los elementos del conjunto B, la función $g \circ f$ está bien definida, ya que para todo $x \in A$ existe un elemento $y \in D$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.



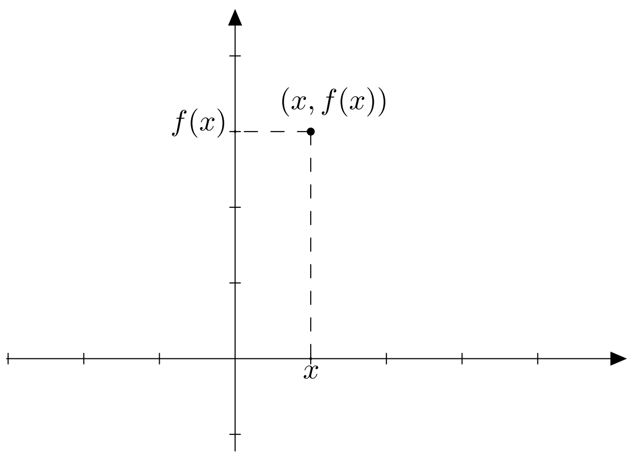
2.4. Gráfico de una función

Adelantándonos un poco al capítulo siguiente consideraremos un subconjunto de reales, $X \subset \mathbb{R}$ y una función $f : X \to \mathbb{R}$ con una determinada regla de asignación $f(x) = y$, además tomaremos un sistema de ejes cartesianos. Para cada $x \in X$, existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$ y por tanto podemos considerar el par ordenado $(x, f(x)) \in X \times \mathbb{R}$. Como $X \subset \mathbb{R}$, se tiene que el par $(x, f(x)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. (Notación: Usualmente se denota $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ como $\mathbb{R}^2$.) Por tanto el par $(x, f(x))$ puede ser asociado con un único punto del plano $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas son las anteriormente mencionadas. Tomando en cuenta las consideraciones anteriores tenemos la siguiente

Definición 2.4.1

Sea $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, se llama gráfico de f y se denota $G(f)$ al conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ tal que sus coordenadas son de la forma $(x, f(x))$.

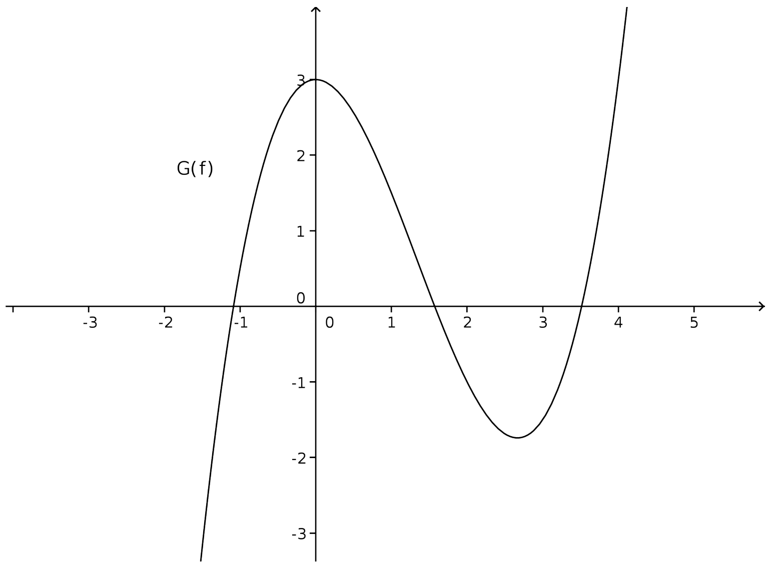
$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \textit{ tal que } x \in X, \quad y = f(x)\}$$



Ejemplo 2.4.1

Consideremos por ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^2 + 3$. Podemos realizar una tabla de valores para calcular algunas imágenes y obtener puntos del gráfico de f.

x	$f(x)$
0	3
-1	$1/2$
3	$-3/2$
1	$3/2$



Ejercicio 6

1. Se considera $X = \{-3, -1, 0, 2, 4, 7\}$ como dominio de f y $B = \{-2, -1, 0, 1, 3, \pi, 8, 10\}$ tal que $f(-3) = 0,\ f(-1) = 8,\ f(0) = \pi,\ f(2) = 8,\ f(4) = 3,\ f(7) = 1$. Representar mediante un diagrama de flechas y efectuar el gráfico de f en un sistema de ejes cartesianos.

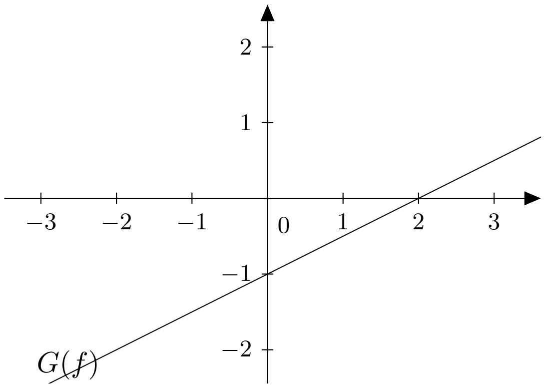
2. Se considera $h : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \frac{x+2}{x-1}$, calcular $h(0),\ h(-1),\ h(\pi), h(\sqrt{2}), h(3)$.

3. Se considera $g : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{(2x+1)^2}{x^2-2x}$, calcular $g(1), g(-1), g(3), g(-\sqrt{3}), g(-\pi), g(1/3), g(x+1), g(x-1)$.

4. Sea $j : \mathbb{R}\backslash\{-3\} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = \frac{x^2+x}{x+3}$ y $k : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $k(x) = \frac{1}{x}$. Determinar si son posibles las siguientes composiciones, en caso contrario determinar una función de dominio más amplio posible cuya regla de asignación sea la que se obtendría mediante la composición.

   a) $j \circ k$
   b) $k \circ j$
   c) $j(cx),\ \ c \in \mathbb{R}$
   d) $k(cx),\ \ c \in \mathbb{R}$

5. Se considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su gráfico se representa en la siguiente figura: Sin



encontrar la expresión de f, hallar el gráfico de las siguientes funciones:

a) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) + 1$.

b) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = f(x) - 2$.

c) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = f(x + 1)$.

d) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(x) = f(x - 1)$.

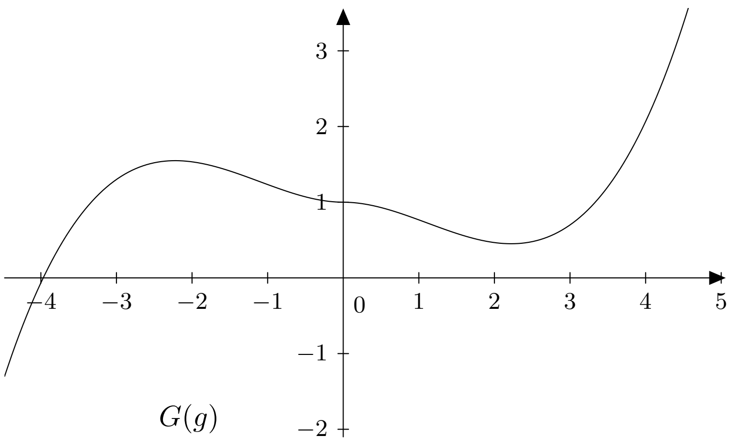
e) $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $m(x) = f(-x)$.

f) $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $n(x) = -f(x)$.

g) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = -f(-x)$.

h) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 2f(x)$.

6. Se considera $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico se muestra a continuación, hallar los gráficos de las



funciones de forma análogas a lo hecho en la parte anterior.

7. Deducir una regla general a partir de lo observado en las partes 5 y 6.

8. Graficar las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x$.

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = -2x$.

d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = |x|$.

e) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = |x| - 1$.

f) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $k(x) = |x| + x$.

g) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(x) = x^2$.

h) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x^2 - 1$.

i) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^2 + x$.

j) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = -x^2 + 1$.

k) $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $s(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

9. Graficar las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$

e) $j : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x+2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

f) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $k(x) = \begin{cases} -5 & \text{si} \quad x = 1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x \neq 1 \end{cases}$

g) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

2.5. Entornos e intervalos

En esta sección se pretende introducir la idea de entorno de un punto en el conjunto de los números reales, para ello utilizaremos el concepto de distancia entre dos puntos e intentaremos obtener una representación gráfica del mismo.

Sean a y b dos números reales, si $a < b$ entonces la distancia entre ellos es $b - a$. Si de lo contrario $a > b$, entonces la distancia entre ellos es $a - b$. Observar que en cualquier caso este número es mayor que cero. Para generalizar la idea anterior y evitar discutir los casos $a < b$ o $a > b$ se introduce la siguiente

Definición 2.5.1
Sean a y $b \in \mathbb{R}$, la distancia entre a y b es

$$d(a,b) = |b - a|$$

En $\mathbb{R}$ con la definición anterior se cumple:
i) $d(a,b) \geq 0$; $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ y $d(a,b) = 0$ si y sólo si $a = b$;
ii) $d(a,b) = d(b,a)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
iii) $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

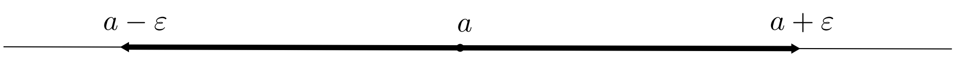
Utilizando la idea de distancia entre dos puntos introduzcamos la siguiente

Definición 2.5.2 (Entorno abierto)
Dado $a \in \mathbb{R}$ y un número real $\varepsilon > 0$, llamamos entorno abierto de centro a y radio ε, el cual anotamos $E(a,\varepsilon)$ o $E_\varepsilon(a)$ al conjunto de los números reales cuya distancia al punto a es menor que ε. En símbolos se tiene

$$E_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } d(a,x) < \varepsilon\}$$

Utilizando la definición de distancia se tiene que el $E_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x - a| < \varepsilon\}$ y recordando las propiedades del valor absoluto se tiene equivalentemente $E_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$.

Con esta equivalencia anterior es mas claro obtener una representación gráfica del entorno de centro a y radio ε.

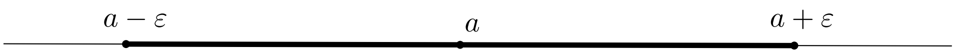


Además de la definición anterior se tiene la siguiente

Definición 2.5.3 (Entorno cerrado)
Dado $a \in \mathbb{R}$ y un número real $\varepsilon > 0$, llamamos entorno cerrado de centro a y radio ε, el cual anotamos $\overline{E(a,\varepsilon)}$ o $\overline{E}_\varepsilon(a)$ al conjunto de los números reales cuya distancia al punto a es menor o igual que ε. En símbolos se tiene

$$\overline{E}_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } d(a,x) \leq \varepsilon\}.$$

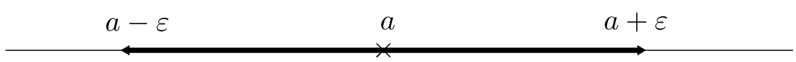
Análogamente a la observación luego de la definición anterior a esta, $\overline{E}_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x-a| \leq \varepsilon\}$ o $\overline{E}_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon\}$. Su representación gráfica puede verse en la siguiente figura: Introduciremos a continuación la noción de entorno



reducido dado que es una idea fundamental al introducir el importante concepto de límite.

Definición 2.5.4 (Entorno reducido)
Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, llamamos entorno reducido de centro a y radio ε, anotándolo $E^*_\varepsilon(a)$ al conjunto $E_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Su representación gráfica puede verse en la siguiente figura:



Utilizando las equivalencias vistas anteriormente se tiene además que $E^*_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } 0 < |x-a| < \varepsilon\}$ o $E^*_\varepsilon(a) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a-\varepsilon < x < a+\varepsilon, \text{ con } x \neq a\}$.

Ejercicio 7
Sean $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \varepsilon' > 0,\ \varepsilon < \varepsilon'$. Expresar por comprensión los siguientes conjuntos:

1. $E_\varepsilon(a) \cap E_{\varepsilon'}(a)$
2. $E_\varepsilon(a) \cup E_{\varepsilon'}(a)$
3. $\overline{E}_\varepsilon(a) \cap \overline{E}_{\varepsilon'}(a)$
4. $E^*_\varepsilon(a) \cap E^*_{\varepsilon'}(a)$
5. $E_\varepsilon(a) \cap E^*_{\varepsilon'}(a)$
6. $E_\varepsilon(a) \cup E^*_{\varepsilon'}(a)$

Sean a y $b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$,
i) llamamos *intervalo abierto* de extremos a, b al conjunto de números reales tales que $a < x < b$, en notación matemática

$$(a, b) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a < x < b\}$$

ii) Llamamos *intervalo cerrado* de extremos a, b al conjunto de números reales tales que $a \leq x \leq b$, en notación matemática

$$[a, b] = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a \leq x \leq b\}$$

Observación: Estas definiciones y las de entorno se pueden vincular de la siguiente manera:

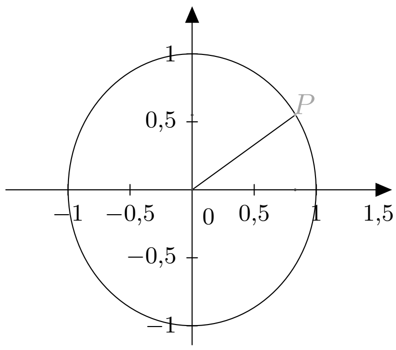
$$E_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \text{ y } E^*_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$

Estos intervalos anteriormente mencionados se dicen acotados, mas generalmente, un conjunto X de números reales se dice acotado si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < k, \forall\ x \in X$. A modo de ejemplo si consideramos el intervalo (a, b), basta tomar algún $k \geq \max\{|a|, |b|\}$ entonces se cumple que $|x| < k,\ \forall\ x \in X$.

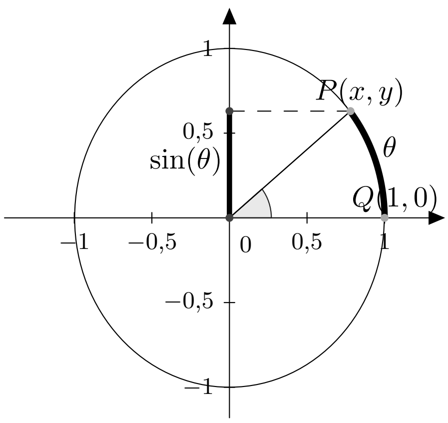
2.6. Trigonometría

Consideremos un sistema de ejes cartesianos ortogonales y una circunferencia de centro en el origen de coordenadas y radio 1. Recordemos que en este caso la circunferencia tiene perímetro 2π.
Si tomamos el punto Q de coordenadas $(1, 0)$ y cualquier otro punto P perteneciente a la circunferencia, queda determinado un arco[1] $\widehat{QP}$ cuya longitud es un número real $\theta \in [0, 2\pi)$.

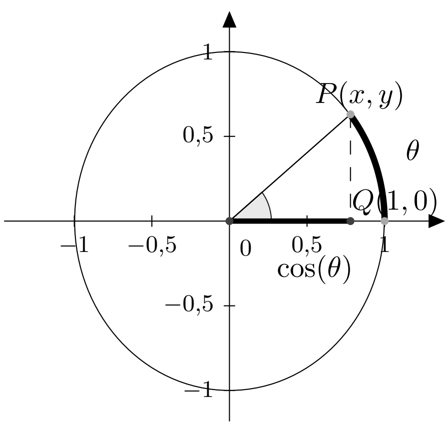
[1] El arco se toma en sentido anti-horario desde Q.



Si consideramos la ordenada del punto P obtenemos un número $y \in [-1, 1]$ el cual depende del arco de longitud θ. Al mismo lo llamaremos seno de θ, $y = \sin(\theta)$.

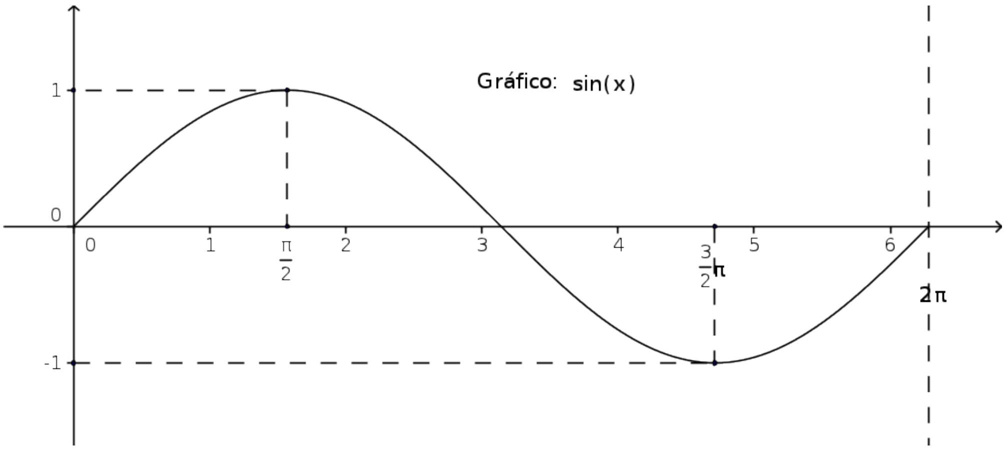


Por otro lado si tomamos la abscisa del punto P obtenemos también un número $x \in [-1, 1]$ el cual también depende del arco θ. Al mismo lo llamaremos coseno de θ, $x = \cos(\theta)$



Por tanto podemos considerar el seno como una función $s : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ tal que $s(x) = \sin(x)$ y su gráfico queda como en la siguiente figura.

Mas aún, podemos considerar la función seno con dominio $\mathbb{R}$ extendiendola de la siguiente

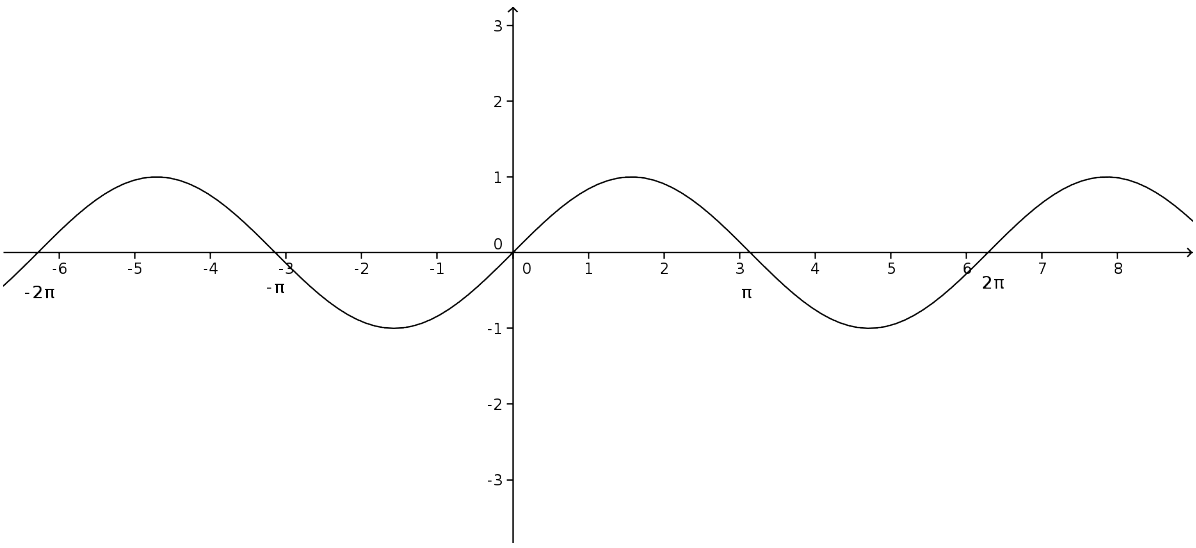


manera:

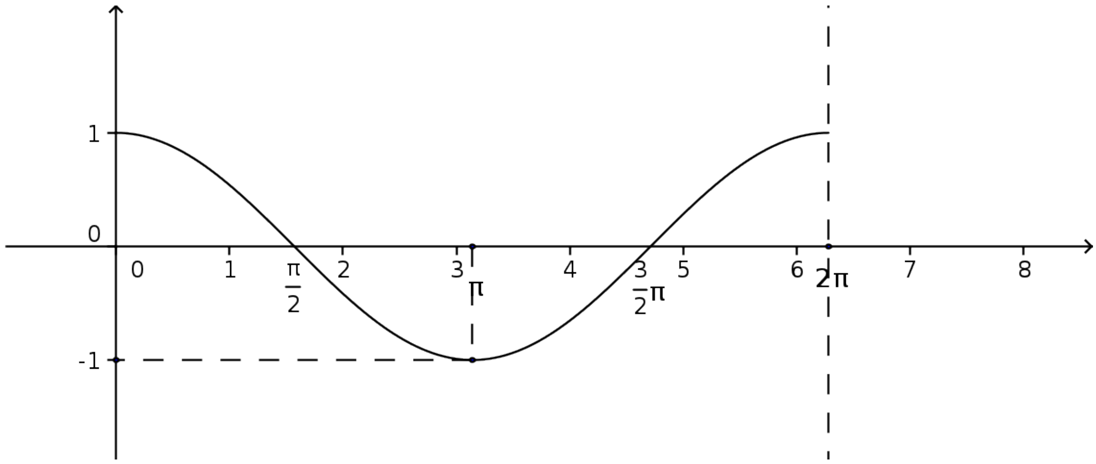
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x),\ \forall\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, x \in [0, 2\pi)$$

La idea fundamental de estas consideraciones es que dado $y \in \mathbb{R}$ existen únicos $k \in \mathbb{Z},\ x \in [0, 2\pi)$ tales que $y = x + 2k\pi$.

Entonces la función seno queda $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $s(x) = \sin(x)$.



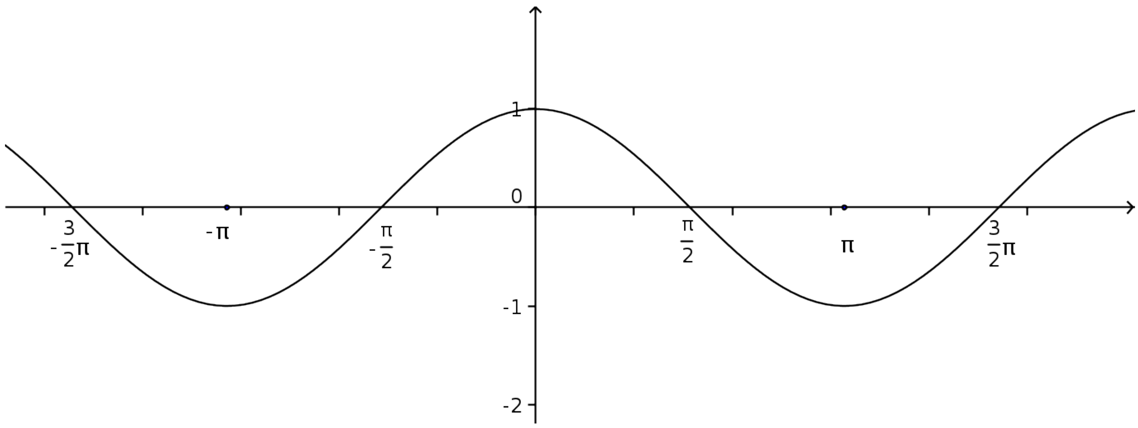
Análogamente podemos considerar al coseno como una función $c : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ tal que $c(x) = \cos(x)$ y su gráfico queda como en la siguiente figura.



Como se hizo con $\sin(x)$ podemos extender la función coseno a todos los reales como

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x), \forall\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, x \in [0, 2\pi)$$

Entonces la función coseno queda $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $c(x) = \cos(x)$.



Por tanto s y c son funciones de dominio $\mathbb{R}$ y periódicas de período 2π y acotadas entre -1 y 1.

Definición 2.6.1

Dado $x \in \mathbb{R}$

1. *Si* $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *se define la tangente de* x *como* $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
2. *Si* $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *se define la secante de* x *como* $\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}$
3. *Si* $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *se define cosecante de* x *como* $\csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}$

4. *Si* $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *se define cotangente de* x *como* $\cot := \tan(x)^{-1}$

Veamos algunas relaciones fundamentales, quedando como ejercicio su justificación:

1. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
2. $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
3. $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
4. $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
5. $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
6. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
7. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
8. $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
9. $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
10. $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
11. $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Conceptos elementales del cálculo

A lo largo de este capítulo nos concentraremos en repasar las ideas fundamentales del cálculo infinitesimal que se introducen en los cursos de matemática del último año de educación media. No ahondaremos demasiado en los aspectos formales y técnicos de las definiciones, proposiciones y sus demostraciones dado que los mismos se desarrollarán en los cursos de Matemática de la Facultad. Apelaremos entonces a recordar los aspectos instrumentales e intuitivos de límite de una función, continuidad, derivadas, significado geométrico de las mismas y a partir de lo anterior el bosquejo de funciones de una variable real, todos estos para ciertos casos particulares, tales como cuando el dominio de la función es un intervalo o una unión de intervalos.

3.1. Límites

3.1.1. Límites finitos

Consideremos $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con X una unión de intervalos [1] entonces la idea intuitiva de límite en un punto a consiste en determinar que sucede con los valores de $f(x)$ cuando x esta "cerca" de a.
Como es habitual, las ideas intuitivas no siempre son posibles de ser formalizadas, sin embargo,

[1] Al mencionar la palabra intervalo, no distinguiremos entre abiertos, cerrados o semi-abiertos

si el dominio es una unión de intervalos, en este caso basta considerar $a \in \overline{X}$[2].
En el caso de que X sea un intervalo abierto, $\overline{X}$ es el intervalo cerrado, y en el caso de que X es un intervalo cerrado, X coincide con $\overline{X}$.
A modo de ejemplo $\overline{(a,b)} = [a,b]$ y $\overline{[a,b]} = [a,b]$.

Observación: Al querer determinar el límite de una función en un punto a, nos interesa saber el comportamiento de las imágenes de valores cercanos al punto a, sin importarnos saber que sucede con la imagen de a, más aún, perfectamente puede suceder que $a \notin X$ y por tanto puede no estar definida su imagen. En síntesis, la idea de límite de una función en un punto a nos indica el comportamiento de f cerca de a sin importar el punto a.

A continuación presentaremos tres ejemplos mediante representación gráfica de casos en que existe el límite.

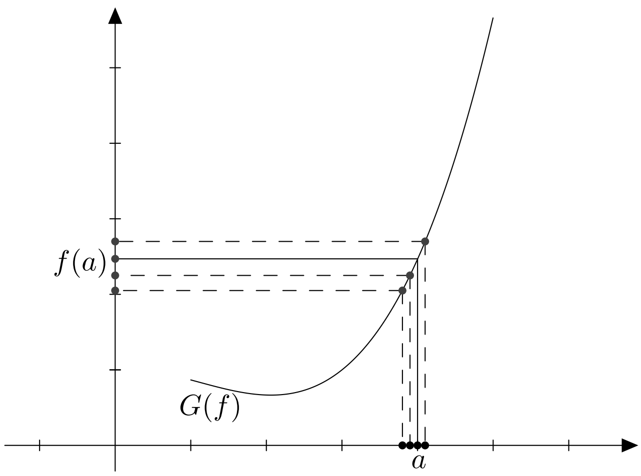


Figura 3.1: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

En la figura 3.1 se muestra el límite cuando x tiende al punto a de $f(x)$ cuyo valor es $f(a)$, en este caso $a \in X$ y su límite coincide con su valor funcional.

En la figura 3.2 se muestra el límite cuando x tiende al punto a de $f(x)$ cuyo valor es $L \neq f(a)$.
En la figura 3.3 se muestra el límite cuando x tiende al punto a de $f(x)$ cuyo valor es L, en este caso $a \notin X$ y sin embargo tiene sentido estudiar que sucede con f cerca de a aunque allí no este definida.

[2] $\overline{X}$ recibe el nombre de *conjunto clausura* de X que consiste en los puntos $y \in \mathbb{R}$ tales que cualquier entorno de centro y intersecta al conjunto X. Sintéticamente $y \in \overline{X}$ si $\forall\, \varepsilon > 0$, $E_\varepsilon(y) \cap X \neq \varnothing$

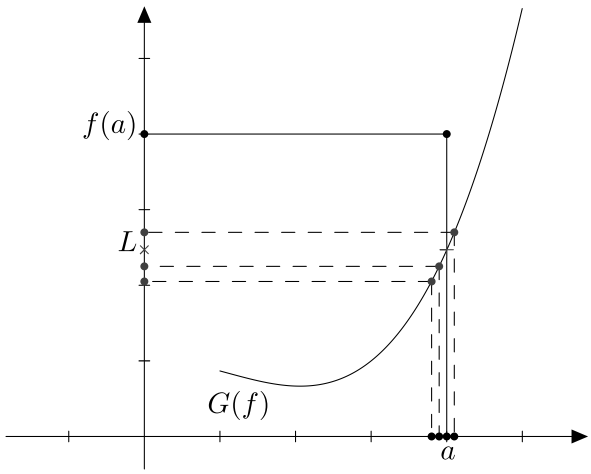


Figura 3.2: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $f(a) \neq L$

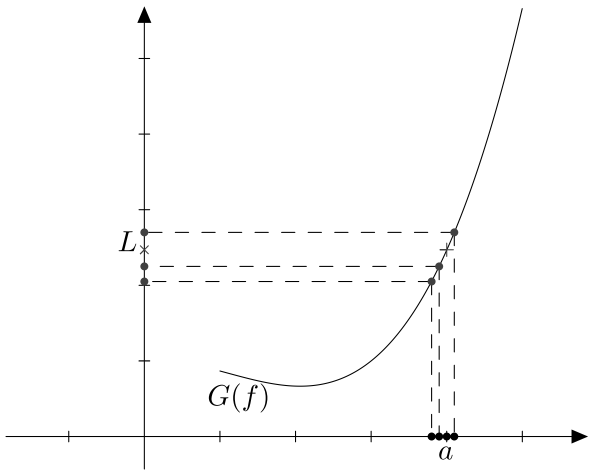


Figura 3.3: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $a \notin X$

Ejemplo 3.1.1
Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.
Realizando el gráfico de f, se puede ver que cuando x tiende a 1, sus imágenes $f(x)$ tienden a 1 y $f(1) = 3$.

En símbolos matemáticos se tiene que $\lim_{x\to 1} 2x - 1 = 1$.

Ahora bien, los procedimientos anteriores para determinar el límite están residiendo en la representación gráfica y no siempre podemos acudir a ella. Por tanto nos dirigiremos a recordar el cálculo de límites, pero para ello veamos antes al concepto de *continuidad en un intervalo.*

Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con X un intervalo y a un punto interior[3] de X. Intuitivamente se tiene que f es continua en a si a valores cercanos a a, sus imágenes están cercanas a $f(a)$. En lenguaje coloquial, si el límite cuando x tiende a a coincide con su valor funcional. Simbólicamente si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Observación: La definición de continuidad no es la anteriormente mencionada, pero bajo las hipótesis anteriores la idea intuitiva es equivalente con la definición.

En relación con las ideas anteriores, se dice que una función es *continua* si es continua para todo elemento de su dominio, $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si es continua $\forall\, x \in X$. En el caso en que X es un intervalo, se tiene que f es continua si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a), \;\; \forall\, a \in X$.

Propiedades a recordar:

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función polinómica, f es continua $\forall\, a \in \mathbb{R}$.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = e^x$, f es continua $\forall\, a \in \mathbb{R}$.
- Si $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es tal que $f(x) = L(x)$, f es continua $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

En todos los casos anteriores a pertenece al interior del dominio y por tanto $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

A continuación resumiremos algunos resultados importantes sobre límites:

El primer resultado nos indica que en caso de que exista el límite, este es único:

Proposición 5
Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{X}$. Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces este es único.

[3] a es un punto interior de X, y se anota $a \in int(X)$ si $\exists\, \delta > 0$ tal que $E_\delta(a) \subset X$.

A continuación supondremos para simplificar ideas que las siguientes funciones tienen igual dominio. Queda como ejercicio determinar el caso en que las mismas no tengan igual dominio.

Proposición 6
Sean $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in X$. *Si se cumple que* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = k$ *y existe un entorno* $E^*_\varepsilon(a)$ *tal que* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall\ x \in E^*_\varepsilon(a)$, *entonces* $\lim_{x\to a} g(x) = k$.

Ejemplo 3.1.2
Consideremos $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = -x$, $g(x) = \sin(x)$ y $h(x) = x$. Recordar que para $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se tiene que $-x \leq \sin(x) \leq x$. Como $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$, se tiene que $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$.
Este es un claro ejemplo del cálculo de un límite sin apelar al gráfico de su función, dado que en un principio no sabemos como es.

Proposición 7
Sean $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *con* $a \in \overline{X}$. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = c$ *y existen* k *y* δ *positivos tal que* $|h(x)| < k$, $\forall x \in E^*_\delta(a)$, *entonces:*

1. $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = b + c$.
2. $\lim_{x\to a}(f - g)(x) = b - c$.
3. $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = b \cdot c$.
4. *Si* $c \neq 0$, *se tiene que* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Proposición 8 (Operaciones y continuidad)
Sean $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuas en* a, *entonces* $f + g, f - g, f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ *son continuas en* a. *Además, considerando* $f/g : X \setminus \{x \in X \text{ tal que } g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ *se tiene que* f/g *es continua en* a $(g(a) \neq 0)$.

Concentremos nuestra atención en recordar los resultados sobre limites y continuidad de la función compuesta.

Proposición 9
Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$ *intervalos,* $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(X) \subset Y$. *Sean* $a \in \overline{X}$ *y*

$b \in Y \cap \overline{Y}$. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *y* $\lim_{x\to b} g(y) = c$, *entonces* $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = c$, *siempre y cuando* $c = g(b)$.

Ejemplo 3.1.3

Es necesario pedir que $g(b) = c$ dado que si esto no sucede, la tesis no tiene por que cumplirse.

Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

Se tiene que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, pero $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 0 \neq 1$. Como vemos, el problema reside en que $\lim_{y\to 0} g(y) \neq g(0)$.

Proposición 10 (Continuidad de la función compuesta)

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ *continua en* $a \in X$ *y* $g : Y \to \mathbb{R}$ *continua en* $b = f(a) \in Y,\ f(X) \subset Y$. *Entonces* $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ *es continua en* a.

3.1.2. Límites infinitos

Presentaremos este tema mediante una serie de ejemplos y ejercicios, se trabajarán todas las ideas a un nivel intuitivo. Luego de esto pretenderemos formalizar alguno de los conceptos trabajados.

Ejemplo 3.1.4

Consideremos la función $s : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $s(x) = \dfrac{2}{1-x}$. Tener en cuenta que en 1 la función s no esta definida, sin embargo podemos indagar que sucede “cerca” de 1 completando las siguientes talas de valores:

1. Para valores a la derecha de 1:

x	$1,1$	$1,01$	$1,001$	$1,0001$	$1,00001$	$1,000001$
$s(x)$	-20	-200	-2000	-20000	-200000	-2000000

¿Cómo podríamos interpretar los resultados obtenidos en la tabla? Se puede observar que a medida que se toman valores cada vez mas cercanos a 1 por la derecha (mayores que 1), sus imágenes toman valores cada vez más negativos. Observar que el numerador es constante igual a 2, y el denominador toma valores cada vez más cercanos a 0 pero negativos, se puede ver entonces que si se divide un número entre otro “muy cercano a cero", el resultado es, en valor absoluto "muy grande". La notación matemática para indicar lo anteriormente mencionado es la siguiente:

$$\lim_{x \to 1^+} s(x) = -\infty$$

Esto se lee como *"el límite de s cuando x tiende a 1 por la derecha, es menos infinito"*.

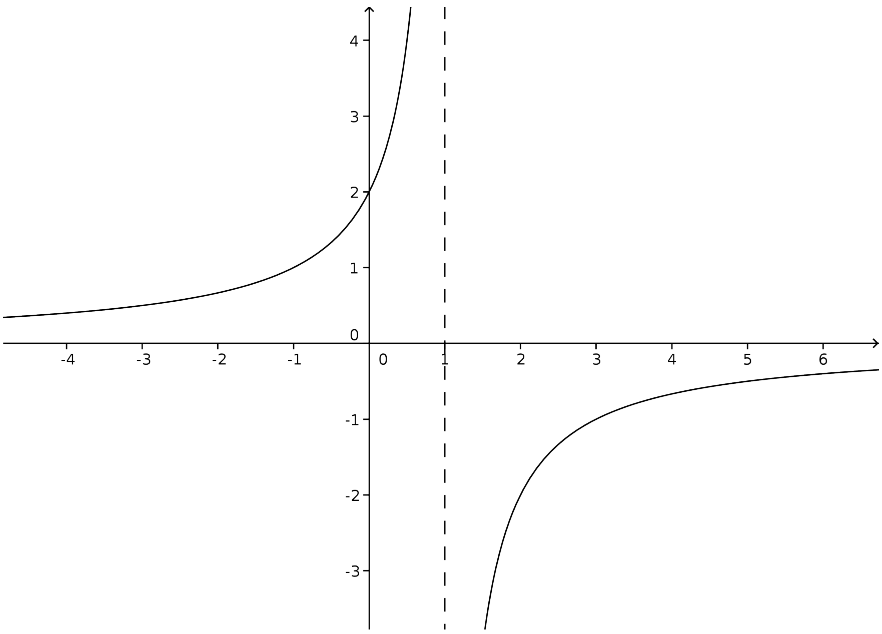
2. Para valores a la izquierda de 1:

x	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,999$	$0,99999$	$0,999999$
$s(x)$	20	200	2000	20000	200000	2000000

Interpretar los resultados obtenidos.
La notación matemática para esto es

$$\lim_{x \to 1^-} s(x) = +\infty$$

Y se lee como *"el límite de s cuando x tiende a 1 por la izquierda, es mas infinito"*.



3. Tal como se quiso saber el comportamiento de s cerca de 1, podemos indagar el comportamiento de s al tomar valores cada vez mas grandes.

x	100	1000	15000	100000	1000000
$s(x)$	$-0,02$	$-0,002$	$-0,000133342$	$-0,00002$	$-0,000002$

Se puede interpretar la tabla de valores afirmando que a medida que se toman valores de x cada vez mas grandes, sus imágenes tienden a cero por la izquierda, esto es, que los valores son cada vez mas pequeños acercándose a cero por valores menores que este. Lo anterior se puede observar claramente en el gráfico de s.
Su notación matemática es la siguiente:

$$\lim_{x \to +\infty} s(x) = 0^-$$

4. Realizar una tabla de valores e interpretar los resultados obtenidos para $x \to -\infty$.

Ejercicio 8
En cada caso se considera una expresión racional como regla de asignación de cierta función. Determinar para que conjunto de números reales tiene sentido esta expresión.
Completar la tabla de valores asociada, bosquejar un gráfico e interpretar los resultados.

1. $r(x) = \dfrac{1}{x-1}$

x	$1,1$	$1,01$	$1,001$	$0,9$	$0,99$	$0,999$
$r(x)$						

2. $l(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x-3)^2}$

x	$3,01$	$3,001$	$3,0001$	$2,99$	$02,999$	$2,9999$
$l(x)$						

Solución: 1. Para $r(x) = \dfrac{1}{x-1}$, si $x - 1 = 0$ la expresión anterior no tiene sentido dado que no se puede dividir entre cero. Por tanto el conjunto de valores para los cuales tiene sentido es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Entonces podemos considerar la función $r : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
Completemos la tabla realizando los cálculos correspondientes:

x	$1,1$	$1,01$	$1,001$	$0,9$	$0,99$	$0,999$
$r(x)$	10	100	1000	-10	-100	-1000

El gráfico de r se puede observar en la Figura 3.4.
2. Para $l(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9}$, análogamente a lo pensado anteriormente, la expresión tiene sentido en $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ y por tanto $l : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$. Completando la tabla se obtienen los siguientes resultados

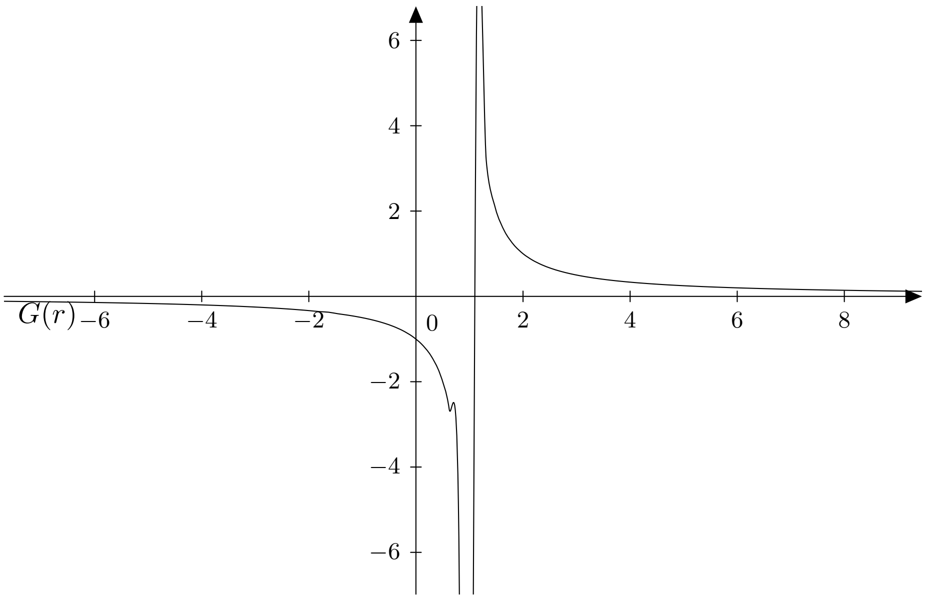


Figura 3.4: Gráfico de r

x	$3,01$	$3,001$	$3,0001$	$2,99$	$2,999$	$2,9999$
$l(x)$	10201	1002001	100020001	9801	998001	99980001

El gráfico de l es dejado como ejercicio.

Ejercicio 9

A partir del gráfico de la función mostrada en la Figura (3.5), determinar si existen los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 3^-} f(x) =$
2. $\lim_{x\to 3^+} f(x) =$
3. $\lim_{x\to 3} f(x) =$
4. $\lim_{x\to 4} f(x) =$
5. $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$
6. $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

Ejercicio 10

A partir de los datos dados a continuación realizar un posible gráfico de la función g.

1. $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} g(x) = 1$
3. $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} g(x) = +\infty$
4. $g(0) = 1$
5. $g(3) = 5$
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$

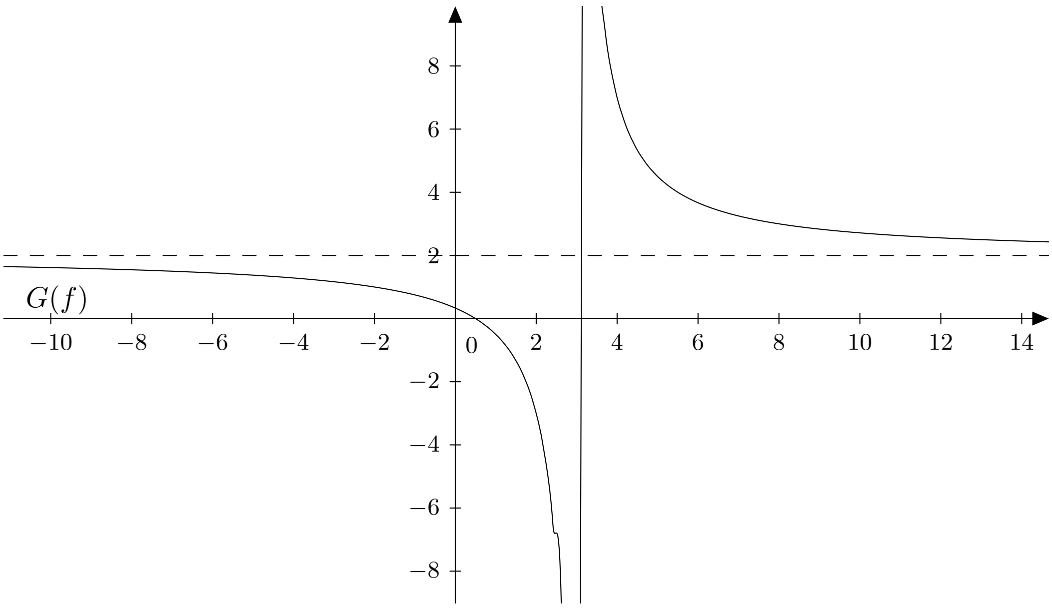


Figura 3.5: Gráfico de f

7. $g(-3) = 5$

8. $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

Realicemos una interpretación del límite infinito:
Primeramente hay que tener en cuenta que ∞ no es un número real.[4]
Consideremos por ejemplo una función f que cumple que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, esto indica como mencionamos anteriormente, que para valores muy cercanos al punto a, sus correspondientes imágenes son muy grandes, en otras palabras, si fijamos *cualquier* valor $k > 0$, es posible encontrar un entorno reducido de centro a tal que todas sus imágenes son mayores que k.
Si denotamos $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, se esta tomando un semi-entorno abierto derecho $(E_\delta^+(a) = (a, a+\delta))$
Retomando el Ejemplo (3.1.4), tomemos un valor de $k = 5000$, entonces tratemos de encontrar en este caso un semi-entorno reducido (¿por qué?).
Buscamos valores cercanos a 1 tal que sus imágenes sean mayores que 500, para esto es claro

[4]En informática, algunos lenguajes de programación consideran una valor especial al cual nombran "infinito", este se puede obtener como resultado de ciertas operaciones matemáticas que no se pueden realizar o bien como resultado de operaciones que son demasiado complejas para la computadora o el lenguaje.

que $f(x)$ tiene que ser mayor que cero y por tanto $x \in (-\infty, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} s(x) > 5000 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{1-x} > 5000 \Leftrightarrow \\ \frac{2}{5000} > 1 - x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{5000} - 1 > -x \Leftrightarrow \\ 1 - \frac{2}{5000} < x < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{4998}{5000} < x < 1 \end{aligned}$$

Con lo que si $x \in (0,9996; 1)$ entonces $s(x) > 5000$ (ver Figura 3.6).

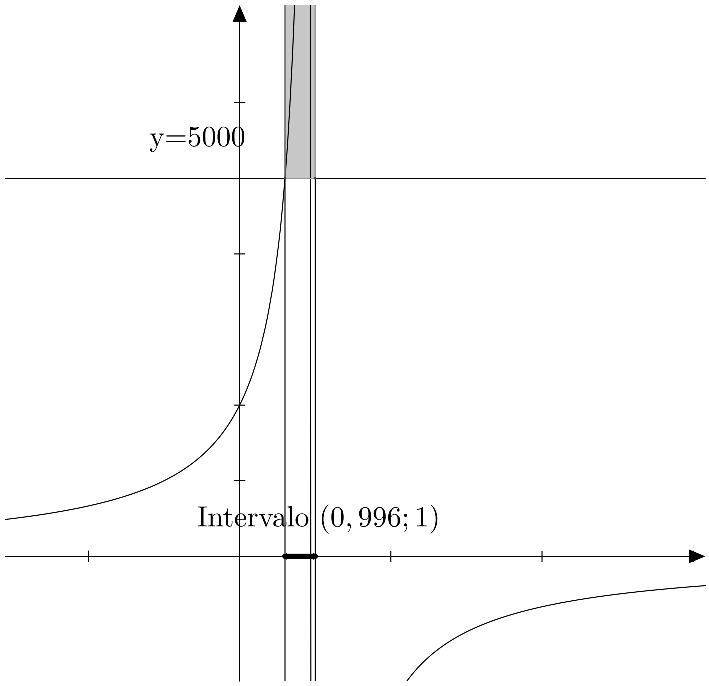


Figura 3.6: $\lim\limits_{x \to 1^-} s(x) = +\infty$

Si tomamos valores de k cada vez mayores podremos encontrar un semi-entorno izquierdo de 1 tal que para todo x que pertenece a ese semi-entorno, se tienen valores funcionales mayores que k.

Luego de este trabajo a nivel intuitivo veamos la definición correspondiente:

Definición 3.1.1
Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, X unión de intervalos tal que $a \in \overline{X}$.

- *Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si para todo $k > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in E^*_\delta(a)$, entonces $f(x) > k$.*

- *Se dice que* $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ *si para todo* $k > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in E^*_\delta(a)$, *entonces* $f(x) < -k$.

Operaciones con límites infinitos

Proposición 11
Sean $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *con* $a \in \overline{X}$.

- *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *y* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, *entonces:*
  1. $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$.
  2. a) *Si* $b > 0$, $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$.
     b) *Si* $b < 0$, $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$.
- *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ *y* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, *entonces* $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \infty$.

El siguiente resultado es de gran utilidad y relaciona el cero con el infinito mediante el cociente.

Proposición 12
Sea $f : X \subset \mathbb{R}$, *con* $a \in \overline{X}$.

1. *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *y existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in E^*_\delta(a)$ *se tiene* $f(x) \neq 0$, *entonces* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, *entonces* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Antes de calcular a modo de ejemplo algunos límites recordemos algunos límites conocidos:

- Si $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ es una función polinómica, entonces $\lim\limits_{x \to \infty} p(x) = \infty$.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^x$, entonces:
  1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$.

- Si $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = L|x|$, entonces

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} L|x| = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} L|x| = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} L|x| = -\infty$.

Ejemplo 3.1.5

Calcularemos los siguientes límites aplicando los resultados anteriores:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1} =$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2 + x} =$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{L|x|} =$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{L|x|} =$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} =$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x} =$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 - x^2 + 6x - 10) \cdot e^x =$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{L|x|} =$

Solución:

1. Resolvemos $x^2 - 2x + 1 = 0$:
   $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, además es la única solución y por tanto se puede garantizar que existe un entorno reducido de centro 1 y radio δ tal que el denominador no se anula. Entonces $\lim\limits_{x \to 1} x^2 - 2x + 1 = 0$, por tanto aplicando la Proposición 12 se tiene

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\to 0}} = \infty$$

   Ahora, estudiando el signo de $x^2 - 2x + 1$ se puede ver

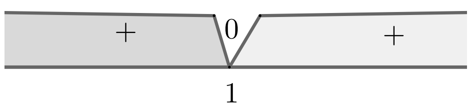


Figura 3.7: $sg(x^2 - 2x + 1)$

que el denominador es positivo si $x \in E^*_\delta(1)$, tomando por ejemplo $\delta = 1/2$. Como el numerador también es positivo se tiene

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\underbrace{x^2-2x+1}_{\to 0^+}} = +\infty$$

2. Estudiemos el signo de $x^2 + x$:
   Las raíces del cociente son 0 y -1 y su diagrama de signo puede verse a continuación:

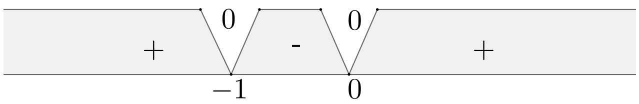


Figura 3.8: $sg(x^2 + x)$

   Por tanto tomando por ejemplo $E^*_{\frac{1}{2}}(0)$, sabemos que el denominador no se anula, además a la izquierda de 0, el signo es negativo y a la derecha es positivo. Entonces

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\underbrace{x^2+x}_{\to 0^-}} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\underbrace{x^2+x}_{\to 0^+}} = +\infty$$

3. Como $\lim_{x\to 0} L|x| = -\infty$, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\underbrace{L|x|}_{\to -\infty}} = 0^-$$

4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\underbrace{L|x|}_{\to +\infty}} = 0^+.$

5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to +\infty}} = 0^+.$

6. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x\to -\infty} \overbrace{e^{-x}}^{\to +\infty} = +\infty.$

7. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \overbrace{(2x^3 - x^2 + 6x - 10)}^{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} = +\infty.$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{L|x|} = \lim_{x\to 0} \overbrace{(x^2+x)}^{\to 0} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{L|x|}}}_{\to 0} = 0.$

3.1.3. Límites indeterminados

En la siguiente sección presentaremos algunos ejemplos de límites indeterminados. Antes aclaremos el significado de *indeterminación*. El término significa que no se puede saber su resultado de forma inmediata y se necesita realizar algunos cálculos para determinarlo.

Para cocientes de funciones polinómicas

Veamos un ejemplo:
Consideremos x^2+x y x^2-x. Es claro que $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x=0$ y $\lim\limits_{x\to 0} x^2-x=0$. Ahora, ¿que sucede si deseamos calcular el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$?
Recordar que si por un lado, el numerador tiende a cero, el cociente "se hará mas pequeño". Por otro lado, si el denominador tiende a cero, el cociente "se hace mas grande". Ahora, ¿qué sucede si esto pasa simultáneamente? En este caso puede decirse a nivel informal que *se produce una lucha entre tender a cero o a infinito, entre hacerse cada vez mas chico o cada vez mas grande. A priori no se sabe "quien" puede ganar y los resultados pueden ser diversos.*
Retomemos el caso anteriormente mencionado

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x^2+x}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-x}_{\to 0}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x+1}^{\to 1}}{\underbrace{x-1}_{\to -1}}=-1$$

Por tanto lo que de antemano resulta un límite el cual no se sabe el resultado, luego de una factorización se cancelan los factores que producen la indeterminación y se calcula el límite.

Veamos otros casos

Ejemplo 3.1.6
Calculemos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-2x+1}$$

Observar que

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{x^3-2x^2-x+2}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-2x+1}_{\to 0}}$$

y por tanto hay que "levantar" la indeterminación. En estos casos es sencillo porque tanto las expresiones que aparecen en el numerador y el denominador son polinomios y si ambas tienden a cero, implica que tienen al menos una raíz común que vale 1 y entonces se pueden factorizar y cancelar.
Factoricemos $x^3 - 2x^2 - x + 2$ utilizando el esquema de Ruffini:

	1	**−2**	**−1**	**2**
1		1	−1	−2
	1	−1	−2	0

Por tanto $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2)$, por otro lado es fácil ver que el denominador se factoriza como $(x-1)^2$. Entonces

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^3 - 2x^2 - x + 2}^{\to 0}}{\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\to 0}} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2 - x - 2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^2 - x - 2}^{\to -2}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}} = \infty$$

Observar que el resultado obtenido es un infinito sin signo dado que depende de los límites laterales. Veamos en detalle lo anterior:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x^2 - x - 2}^{\to -2}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^+}} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{x^2 - x - 2}^{\to -2}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = +\infty$$

Lo anterior se puede determinar mediante un estudio del signo de $x-1$ viendo que por derecha de 1 es positivo y por izquierda negativo.

Ejemplo 3.1.7
Calculemos

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 4x + 3}$$

Se tiene que

$$\lim_{x\to -1} \frac{\overbrace{x^3 + 2x^2 + x}^{\to 0}}{\underbrace{x^2 + 4x + 3}_{\to 0}}$$

Por tanto análogamente al caso anterior, -1 es raíz del numerador y del denominador. Entonces factorizando las expresiones se tiene $x^3+2x^2+x = x(x+1)^2$ y $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$.

Con lo que

$$\lim_{x\to -1} \frac{\overbrace{x^3+2x^2+x}^{\to 0}}{\underbrace{x^2+4x+3}_{\to 0}} = \lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)^2}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x\to -1} \frac{\overbrace{x(x+1)}^{\to 0}}{\underbrace{x+3}_{\to 2}} = 0$$

Hemos mostrado entonces tres casos en que el numerador tiende a cero, el denominador también, y el resultado es diferente en cada caso. A esto nos referimos cuando decimos que el limite es indeterminado, puede dar cualquier resultado.

En general, si $a \in \mathbb{R}$, P y Q son dos funciones polinómicas tales que

$$\lim_{x\to a} \frac{\overbrace{P(x)}^{\to 0}}{\underbrace{Q(x)}_{\to 0}}$$

Entonces se puede factorizar tanto $P(x)$ como $Q(x)$ de la siguiente manera:
$P(x) = (x-a)P_1(x)$ y $Q(x) = (x-a)Q_1(x)$. Con lo que

$$\lim_{x\to a} \frac{\overbrace{P(x)}^{\to 0}}{\underbrace{Q(x)}_{\to 0}} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)}$$

y se cancela el factor $(x-a)$. Si $P_1(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ y $Q_1(x) \underset{x\to a}{\to} 0$, entonces todavía tienen al menos una raíz común a y se puede factorizar nuevamente. En caso contrario se "levanta" la indeterminación y el límite se calcula de forma inmediata.

Pensemos ahora en la siguiente situación:
Se tienen dos funciones tales que cuando $x \to a$, ambas tienden a $+\infty$. ¿Se puede afirmar algo sobre el resultado del límite cuando $x \to a$, de la resta de ambas? Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1.8
Intentemos calcular $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-1}$. Observar que $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ y que

$\lim_{x\to 1^+} \frac{3}{x-1} = +\infty$. Se da entonces

$$\lim_{x\to 1^+} \underbrace{\boxed{\frac{1}{x-1}}}_{\to +\infty} - \underbrace{\boxed{\frac{3}{x-1}}}_{\to +\infty}$$

y este es indeterminado. Para levantar la indeterminación podemos observar que se puede extraer un factor común $\dfrac{1}{x-1}$, y entonces

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}(1-3) = \lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{x-1} = -\infty$$

Algo similar ocurre cuando $x \to 1^-$:
$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^-} \frac{3}{x-1} = -\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{x-1} = +\infty$$

En general cuando los límites laterales son diferentes se pueden resumir de la siguiente manera

$$\lim_{x\to \pm 1} \frac{-2}{x-1} = \mp\infty$$

Ejemplo 3.1.9
Calcular $\displaystyle\lim_{x\to -1^\pm} \frac{3x}{x+1} - \frac{3}{x+1}$:

$$\lim_{x\to -1^\pm} \underbrace{\boxed{\frac{3x}{x+1}}}_{\to \mp\infty} - \underbrace{\boxed{\frac{-3}{x+1}}}_{\to \mp\infty}$$

y por tanto es indeterminado. Para calcularlo debemos extraer un factor común $\frac{1}{x+1}$. Entonces

$$\lim_{x\to -1^\pm} \frac{3x}{x+1} - \frac{-3}{x+1} = \lim_{x\to -1^\pm} \frac{1}{x+1}(3x+3) = \lim_{x\to -1^\pm} \frac{3(x+1)}{x+1} = 3$$

Estamos en condiciones de justificar que si P es una función polinómica, entonces $\lim_{x\to \pm\infty} P(x) = \infty$.
Tomemos por ejemplo $x^2 - x$:

$$\lim_{x\to +\infty} \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - \underbrace{x}_{\to +\infty}$$

y por tanto es indeterminado, sin embargo podemos extraer de factor común el término de mayor grado y obtener $x^2 - x = x^2(1 - \dfrac{1}{x})$. Con lo que

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 - x = \lim_{x\to +\infty} \overbrace{x^2}^{\to +\infty} \underbrace{(1 - \overset{\to 0}{\boxed{\frac{1}{x}}})}_{\to 1} = +\infty$$

En general si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es una función polinómica. Entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \left(\overbrace{1 + \underbrace{\boxed{\frac{a_{n-1}}{a_n x}}}_{\to 0} + \cdots + \underbrace{\boxed{\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}}}_{\to 0} + \underbrace{\boxed{\frac{a_0}{a_n x^n}}}_{\to 0}}^{\to 1} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

y se dice que el límite cuando $x \to \infty$ de una función polinómica es igual al límite del término de mayor grado.

Veamos un ejemplo de un límite indeterminado que ocurre al considerar un cociente, donde tanto el numerador como el denominador tienden a infinito.

Ejemplo 3.1.10

- Calculemos el $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + 6x^2 - x + 8}{x^2 + 5x - 1}$.
  Notar que como hemos visto anteriormente,

  $$\lim_{x\to+\infty} x^3 + 6x^2 - x + 8 = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 + 5x - 1 = +\infty$$

  Por tanto el numerador y el denominador tienden a $+\infty$.
  Para calcular este límite una posible estrategia es utilizar un razonamiento análogo al visto anteriormente y convertir este cociente en un producto:

  $$\frac{x^3 + 6x^2 - x + 8}{x^2 + 5x - 1} = \frac{x^3 \left(1 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \overbrace{\boxed{\frac{x^3}{x^2}}}^{=x} \cdot \frac{\left(1 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)}{\left(1 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}$$

  Con lo que

  $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 6x^2 - x + 8}{x^2 + 5x - 1} &= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{\overbrace{\left(1 + \dfrac{6}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{8}{x^3}\right)}^{\to 1}}{\underbrace{\left(1 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)}_{\to 1}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x = +\infty\end{aligned}$$

- Calculemos el $\lim\limits_{x\to} \dfrac{4x + 3}{2x^2 + x}$.

  Observar que

  $$\frac{4x + 3}{2x^2 + x} = \frac{4x\left(1 + \frac{3}{4x}\right)}{2x^2\left(1 + \frac{1}{2x}\right)} = \frac{2}{x} \cdot \frac{\left(1 + \frac{3}{4x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2x}\right)}$$

Con lo que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+3}{2x^2+x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} \cdot \overset{\to 1}{\boxed{\frac{\left(1+\frac{3}{4x}\right)}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0
\end{aligned}$$

Lo mostrado anteriormente por medio del ejemplo se puede generalizar al considerar el límite cuando $x \to \infty$ del cociente de dos funciones polinómicas.

Ejercicio 11

Sean $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0,\ Q(x) = b_p x^p + \ldots + b_0$ son dos funciones polinómicas. Calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} =$$

discutiendo según $n < p,\ n > p,\ n = p$.

Ejercicio 12

Calcular los siguientes límites:

1. *a*) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{5x-2} =$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to-3} \frac{-2x+6}{\frac{1}{2}x^2+x} =$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{2x^2-6x+1}{1-x} =$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{3x^2+\sqrt{2}}{x^2} =$

2. *a*) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x-2}{2x^2-2x-4} =$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^2-2x-3}{x+1} =$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-1} =$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{x^2+5x+6}{2x^3+12x^2+6x-20} =$

3. *a*) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^6+x^2-x+3}{x^2+8x-40} =$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2+25}{10x^3+7x^2+x} =$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3}{4}x^6+8x^3-6x^2}{2x^6-7x^4+8x-2} =$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\sqrt{7}x^4-\sqrt{2}x+4}{2x^4-3x^3-48} =$

4. *a*) $\displaystyle\lim_{x\to1^\pm} \frac{9x-2}{6x^2+2x-8} =$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^\pm} \frac{8x^2+6x}{6x-3} =$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to4^\pm} \frac{-6x^2-2x+4}{7x^2-21x-28} =$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}^\pm} \frac{8x^3+9x}{-x^2+2} =$

3.2. Funciones elementales

Además de los ejemplos trabajados anteriormente, que radicaban básicamente en funciones polinómicas y cocientes de las mismas, presentaremos otro tipo de funciones elementales junto con sus gráficos y límites particulares.

3.2.1. Función raíz n-ésima

Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Observar que f no es inyectiva dado que por ejemplo $f(-2) = f(2) = 4$ y tampoco es sobreyectiva porque por ejemplo -1 no tiene preimagen. Por cualquiera de las causas anteriores f no tiene inversa.
Ahora bien, si cambiamos el dominio y el codominio podemos encontrar una inversa de f^*, donde f^* tenga la misma regla de asignación que f.
Tomemos $f^* : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $f^*(x) = x^2$. En este caso se puede verificar que f^* es biyectiva y por tanto invertible:

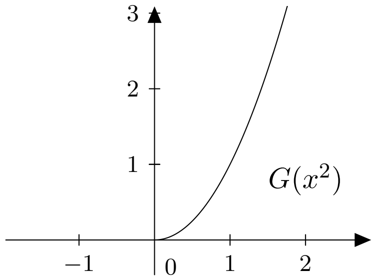
Inyectividad: Sean $x_1, x_2 \in D(f^*)$ tales que $f^*(x_1) = f^*(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$. Como $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, si $x_1^2 = x_2^2$ entonces $x_1 = x_2$ y f^* es inyectiva.

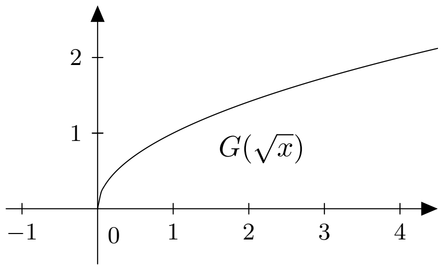
Sobreyectividad: Sea $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tratemos de determinar si $y \in Im(f^*)$.
$y \in Im(f^*)$ si existe $x \in D(f^*)$ tal que $f^*(x) = y \Leftrightarrow \exists\ x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$. La última equivalencia se debe a que ambos son no negativos. Entonces para cualquier y encontramos una sola preimagen $\sqrt{y}$.

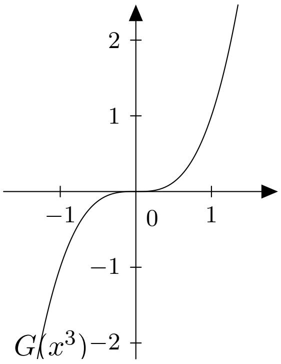
Se tiene entonces que f^* es invertible y mediante la prueba de la sobreyectividad encontramos una regla de asignación para su inversa:

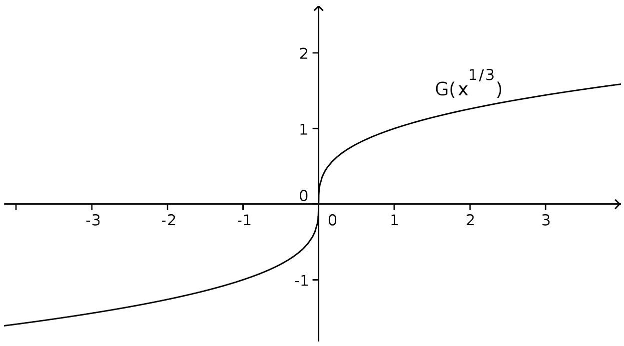
$$(f^*)^{-1} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \text{ tal que } f^*(x) = \sqrt{x}$$

Tomemos ahora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^3$:
Se puede probar que g es biyectiva (a cargo del lector) y por tanto tiene inversa $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.









Generalizando las ideas anteriores, la inversa de una función tal que su expresión es de la forma x^n, $n \in \mathbb{N}$, depende de la paridad de n:

<u>n par:</u> $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $f(x) = x^n$ y su inversa es $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

<u>n impar:</u> $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^n$ y su inversa es $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Propiedades:

La función raíz n-ésima es continua para cualquier $n \in \mathbb{N}$, en los cursos de Cálculo se podrá justificar con detalle esta afirmación. Además si

<u>n par:</u> $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$. <u>$n$ impar:</u> $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt[n]{x} = \pm\infty$

Por otra parte podemos considerar una función g, y tratar de componerla con una función cuya expresión sea de la forma $f(x) = \sqrt{x}$. Entonces se obtiene la expresión $\sqrt{g(x)}$. Recordar que para que la composición tenga sentido se debe cumplir que el conjunto imagen de g debe estar incluido en el dominio de f y en este caso, para que esto se cumpla $g(x)$ debe ser no negativo.

En resumen $f \circ g$ tiene sentido si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $g(x) \geq 0$. Entonces podemos tomar como dominio más amplio posible de $f \circ g$ al conjunto $g^{-1}([0, +\infty))$.

Observación: Usualmente en los cursos de secundaria se trabaja de la manera anterior, a partir de una expresión se encuentra el conjunto donde tiene sentido, esto se conoce como "estudio del dominio" de una función. Formalmente esto no es correcto dado que una función no consta solo de la expresión analítica, sino que su dominio y codominio deben ser dados de antemano. Sin embargo una posible solución se puede plantear de la siguiente manera: *"Dada la siguiente expresión analítica $f(x)$, encontrar una función de dominio lo más amplio posible tal que su expresión sea la anterior"*.

Si g es continua, por la Proposición 10, $f \circ g$ tal que $(f \circ g)(x) = \sqrt{g(x)}$ también lo es y:

- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b,\ b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{g(x)} = \sqrt{b}$.
- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ entonces $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{g(x)} = +\infty$.

Ejercicio 13

Realizar una discusión análoga a la anterior para el caso en que $(f \circ g)(x) = \sqrt[n]{x}$.

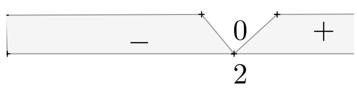
Veamos un ejemplo al detalle de lo mencionado lineas arriba:

Ejemplo 3.2.1

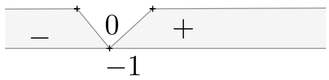
Consideremos la expresión analítica $\sqrt{\dfrac{2x-4}{x+1}}$. Hallemos una función h de dominio lo más amplio posible tal que su expresión analítica coincida con la anterior.

Para ello debemos resolver la inecuación $\dfrac{2x-4}{x+1} \geq 0$:

Estudiamos primero el signo del numerador, $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$, entonces: Luego



el signo del denominador, $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, entonces:



Y el signo de $\frac{2x-4}{x+1}$ queda como sigue:

Por tanto podemos considerar $h : (-\infty, -1) \cup [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \sqrt{\dfrac{2x-4}{x+1}}$. Calculemos algunos límites de h:

- $\lim\limits_{x\to -1^-} \sqrt{\dfrac{2x-4}{x+1}}$.

$$\lim_{x\to -1^-} \sqrt{\underbrace{\boxed{\dfrac{\overbrace{2x-4}^{\to -6}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^-}}}}_{\to +\infty}} = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{2x-4}{x+1}}$.

$$\lim_{x\to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{\overbrace{2x-4}^{\to \pm\infty}}{\underbrace{x+1}_{\to \pm\infty}}} = \lim_{x\to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{2x}{x}} = \sqrt{2}$$

Ejercicio 14

1. Dadas la siguientes expresiones analíticas, hallar en cada caso el dominio más amplio posible de una función cuya expresión sea la mencionada.

   a) $i(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

   b) $j(x) = \sqrt{\dfrac{-3x+1}{6x+2}}$

   c) $k(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x+1}}$

   d) $l(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+x-2}{x+1}}$

2. Para las funciones halladas en la parte anterior, calcular los siguientes límites:

a)
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} i(x)$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} i(x)$

b)
- $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}^+} j(x)$

c)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$
- $\lim\limits_{x \to -1^-} k(x)$

d)
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} l(x)$
- $\lim\limits_{x \to -2^\pm} l(x)$
- $\lim\limits_{x \to -1^\pm} l(x)$

3.2.2. Función exponencial

Tomemos $a \in \mathbb{R}^+$, una función exponencial de base a es de la forma $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = a^x$. Las propiedades de dicha función dependen básicamente de a. Para cualquier valor de a, la función es continua, $Im(f) = \mathbb{R}^+$, es decir que $a^x > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Además

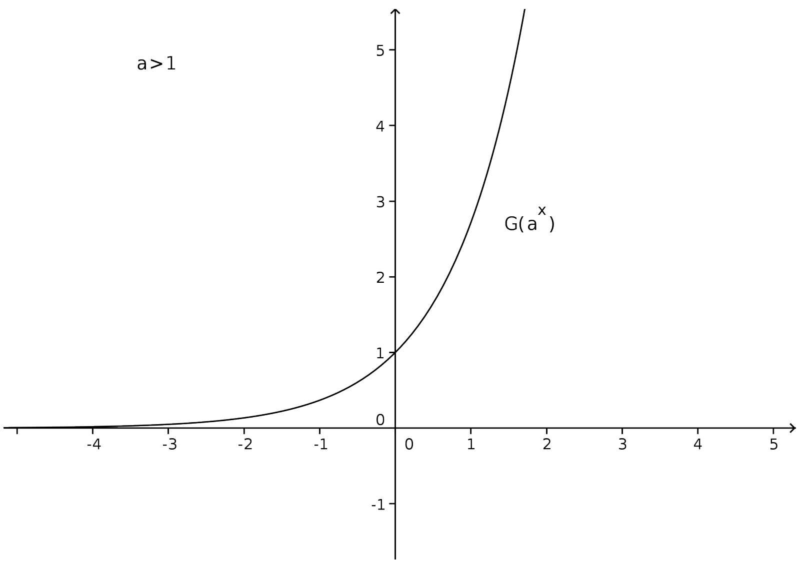
- Si $a > 1$, la función es creciente y

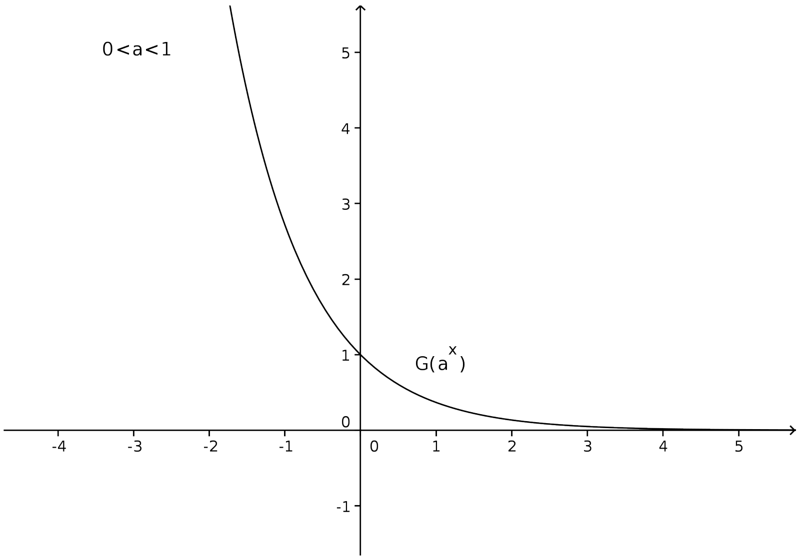
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

- Si $0 < a < 1$ la función es decreciente y

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

Sus gráficos se muestran a continuación:





En cálculo es usual trabajar con una base particular, que se anota con la letra e, y su valor es aproximadamente $e \approx 2,71828183\ldots$. La justificación del uso del número e como base será dejada para los cursos de Cálculo I.

Por otra parte, si deseamos componer alguna función g, con una función exponencial h, no debemos preocuparnos del conjunto donde esta definida la composición, dado que el dominio de una función exponencial es $\mathbb{R}$. Por lo tanto, si $g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene cierta expresión $g(x)$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $h(x) = e^x$, entonces $h \circ g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(h \circ g)(x) = e^{g(x)}$.
Por la misma justificación que antes, si g es continua, $h \circ g$ también lo es.

Veamos un ejemplo en detalle:

Ejemplo 3.2.2
Utilicemos por comodidad la expresión trabajada en el ejemplo anterior, $g(x) = \dfrac{2x-4}{x+1}$.
Entonces obtenemos $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\frac{2x-4}{x+1}}$.

Ya hemos hecho el estudio de signo, por tanto pasemos a calcular algunos límites particulares.

- $\lim\limits_{x\to -1^-} e^{\frac{2x-4}{x+1}}$.

$$\lim_{x\to -1^-} e^{\overbrace{\frac{\overbrace{2x-4}^{\to -6}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^-}}}^{\to +\infty}} = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to -1^+} e^{\frac{2x-4}{x+1}}$.

$$\lim_{x\to -1^-} e^{\boxed{\frac{\overbrace{2x-4}^{\to -6}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^+}}}\to -\infty} = 0$$

- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} e^{\frac{2x-4}{x+1}}$.

$$\lim_{x\to \pm\infty} e^{\frac{\overbrace{2x-4}^{\to \pm\infty}}{\underbrace{x+1}_{\to \pm\infty}}} = \lim_{x\to \pm\infty} e^{\frac{2x}{x}} = e^2$$

Ejercicio 15

1. Dadas la siguientes expresiones analíticas, hallar en cada caso el dominio más amplio posible de una función cuya expresión sea la mencionada.

a) $i(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$

b) $j(x) = e^{\frac{-3x+1}{6x+2}}$

c) $k(x) = e^{\frac{x^2+x-2}{x+1}}$

d) $l(x) = e^{\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}}$

2. Para las funciones halladas en la parte anterior, calcular los siguientes límites:

a)
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} i(x)$
- $\lim\limits_{x\to 1^\pm} i(x)$

b)
- $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}^\pm} j(x)$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} j(x)$

c)
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} k(x)$
- $\lim\limits_{x\to -1^\pm} k(x)$

d)
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} l(x)$
- $\lim\limits_{x\to 2^\pm} l(x)$
- $\lim\limits_{x\to -1^\pm} l(x)$

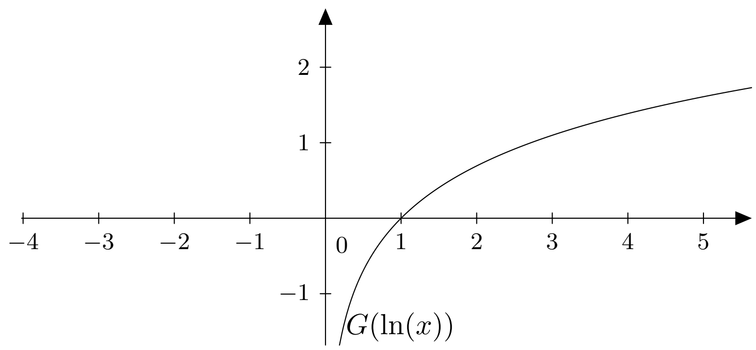
3.2.3. Función logarítmica

Consideremos $a > 0$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $h(x) = a^x$ es una función exponencial. Se puede probar que h es biyectiva y por tanto tiene inversa. Si llamamos h^{-1} a esta, se tiene que $h^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y su regla de asignación $h^{-1}(x)$ cumple que $(h \circ h^{-1})(x) = x$, $(h^{-1} \circ h)(x) = x$. h^{-1} recibe el nombre de logaritmo en base a y se anota como $\log_a(y)$.
Por tanto $\log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$.

Propiedades a recordar:

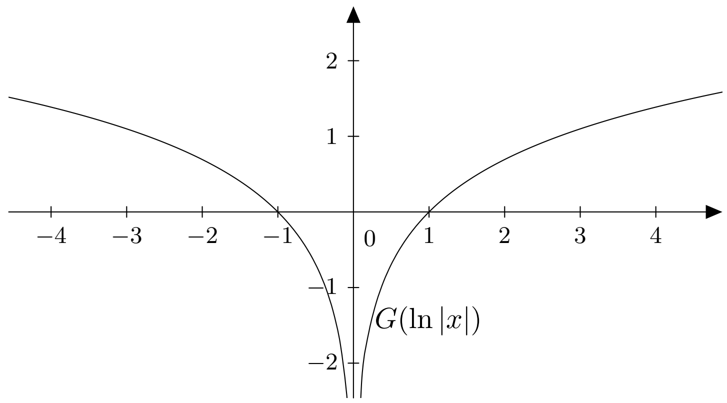
- $\log_a(x_1) + \log_a(x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2)$.
- $\log_a(x_1) - \log_a(x_2) = \log_a(\frac{x_1}{x_2})$.
- $\log_a(x_1^{x_2}) = x_2 \log_a(x_1)$.

Cuando se toma como base al número e, se dice que el logaritmo se toma en base natural y se denota simplemente como L o ln, quedando sobre entendida la base utilizada. Presentemos el gráfico de $i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = \ln(x)$



Como vimos a partir de la definición del logaritmo, esta es la inversa de la exponencial, se obtiene que su dominio es $\mathbb{R}^+$.
Ahora bien, en vez de que la regla de asignación sea $\ln(x)$, podemos modificarla por $\ln|x|$, y en este caso, para valores negativos del logaritmando también tiene sentido la expresión. En resumidas cuentas podemos plantear una función $s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $s(x) = \ln|x|$ y cuyo gráfico queda simétrico respecto al eje $\vec{y}$.

Si deseamos componer $\ln(x)$ con una función g es necesario pedir $g(x) > 0$ y si deseamos componer $\ln|x|$ con una función g, es necesario sólo $g(x) \neq 0$.



A modo de ejemplo tomemos $g(x) = x - 1$, entonces la composición queda $h : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \ln(x-1)$, y $h_1 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $h_1(x) = \ln|x-1|$.
Los límites particulares de ln son:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

Ejercicio 16

1. Dadas la siguientes expresiones analíticas, hallar en cada caso el dominio más amplio posible de una función cuya expresión sea la mencionada.

   a) $i(x) = \ln \dfrac{x}{x-1}$

   b) $j(x) = \ln \left| \dfrac{-3x+1}{6x+2} \right|$

   c) $k(x) = \ln \dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

   d) $l(x) = \ln \left| \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2} \right|$

2. Para las funciones halladas en la parte anterior, calcular los siguientes límites:

   a)
   - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} i(x)$
   - $\lim\limits_{x \to 1^+} i(x)$
   - $\lim\limits_{x \to 0^-} i(x)$

   b)
   - $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}^{\pm}} j(x)$
   - $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^{\pm}} j(x)$
   - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} j(x)$

   c)
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$
   - $\lim\limits_{x \to 1^+} k(x)$
   - $\lim\limits_{x \to -1^-} k(x)$
   - $\lim\limits_{x \to -2^+} k(x)$

   d)
   - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} l(x)$
   - $\lim\limits_{x \to 2^{\pm}} l(x)$
   - $\lim\limits_{x \to -1^{\pm}} l(x)$

3.3. Órdenes Infinitos e Infinitésimos

Hasta ahora hemos visto diferentes maneras de calcular límites y en particular resolver algunas indeterminaciones sencillas. Observar que ciertas indeterminaciones se producían en los siguientes casos:

1. $\lim_{x\to a} \overbrace{f(x)}^{\to+\infty} - \overbrace{g(x)}^{\to+\infty}$

2. $\lim_{x\to a} \overbrace{f(x)}^{\to+\infty} \overbrace{g(x)}^{\to 0}$

3. $\lim_{x\to a} \dfrac{\overbrace{f(x)}^{\to+\infty}}{\underbrace{g(x)}_{\to\infty}}$

4. $\lim_{x\to a} \dfrac{\overbrace{f(x)}^{\to 0}}{\underbrace{g(x)}_{\to 0}}$

Por tanto es de sumo interés analizar las funciones cuando tienden a infinito y cuando tienden a cero dado que ciertas indeterminaciones se dan en estos casos.

Recordemos que una función f se dice que es un infinito en cierto punto a si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Tomemos por ejemplo una función exponencial (e^x), una polinomial (x) y una logarítmica ($\ln|x|$).

Como ya hemos visto, se tiene:

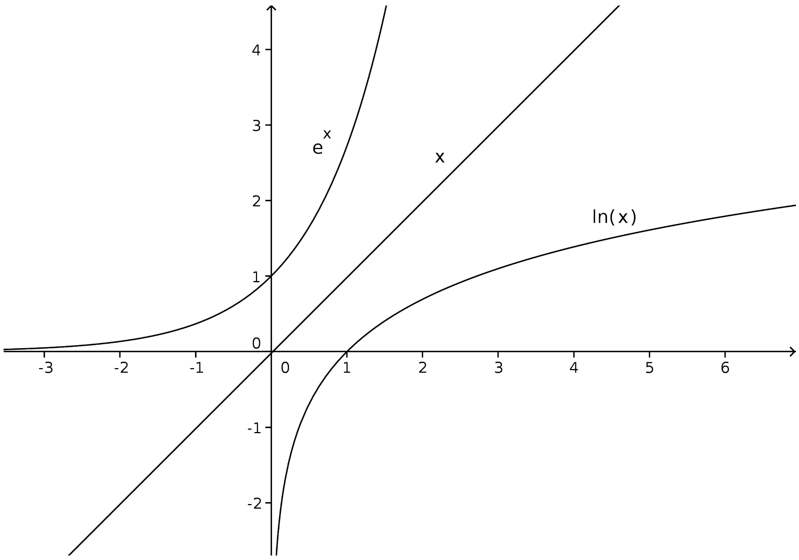
1. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2. $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

3. $\lim_{x\to+\infty} \ln|x| = +\infty$

y por tanto las tres son infinitos cuando x tiende a infinito. Sin embargo, "la velocidad" con la que tienden a infinito es diferente en cada caso.

Comparemos la tendencia a infinito mediante una tabla:



	10	100	1000	10000	100000
$\ln(x)$	$2,3\ldots$	$4,6\ldots$	$6,91\ldots$	$9,21\ldots$	$11,51\ldots$
x	10	100	1000	10000	100000
e^x	$22166,09\ldots$	e^{100}	e^{1000}	e^{10000}	e^{100000}

Intentemos formalizar las ideas mencionadas anteriormente.

3.3.1. Infinitésimos e infinitos

Por comodidad en esta parte trabajaremos en forma simultanea ambos conceptos y consideraremos $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dado que calcularemos límites tanto cuando x tiende a un número real como cuando tiende a infinito.

Definición 3.3.1 (Infinitésimo e infinito)
Decimos que la función $f : X \to \mathbb{R}$ es un **infinitésimo** *cuando $x \to a$ (respectivamente un* **infinito***) si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ (respectivamente $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$).*

Definición 3.3.2 (Infinitésimos e infinitos comparables)
Dadas dos infinitésimos o infinitos f, g cuando x tiende a a, decimos que son comparables, si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ existen en $\mathbb{R}$ o son ∞.

Definición 3.3.3 (Órdenes de infinitésimos)
Dados dos infinitésimos comparables f, g cuando x tiende a a, se dice que:

- *f es de mayor orden que g cuando $x \to a$ si* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *y lo anotamos* $ord\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{>} ord\big(g(x)\big)$.
- *f es de menor orden que g cuando $x \to a$ si* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ *y lo anotamos* $ord\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{<} ord\big(g(x)\big)$.
- *f es de igual orden que g cuando $x \to a$ si* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k,\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y lo anotamos* $ord\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{=} ord\big(g(x)\big)$.

Definición 3.3.4 (órdenes de infinitos)
Dadas dos infinitos comparables f, g cuando x tiende a a, se dice que:

- *f es de mayor orden que g cuando $x \to a$ si* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ *y lo anotamos* $ord\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{>} ord\big(g(x)\big)$
- *f es de menor orden que g cuando $x \to a$ si* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *y lo anotamos* $ord\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{<} ord\big(g(x)\big)$
- *f es de igual orden que g cuando $x \to a$ si* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k,\ k \in \mathbb{R} - \{0\}$ *y lo anotamos* $ord\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{=} ord\big(g(x)\big)$

3.3.2. Equivalencia

Definición 3.3.5 (Infinitésimos e infinitos equivalentes)
Decimos que dos infinitésimos o infinitos f y g son equivalentes cuando $x \to a$, y lo anotamos $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *si* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Se puede verificar que si $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$, por lo tanto f y g son comparables.

Nos concentraremos ahora en estudiar como podemos sacarle provecho a esta relación.

Proposición 13
Sean f y g infinitésimos o infinitos cuando $x \to a$. Supongamos que existe el límite: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *y que* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$*, entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)}$$

Análogamente, si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$*, tenemos que:*

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} h(x)\cdot g(x)$$

El resultado anterior es una herramienta muy potente a la hora de calcular límites, claro, antes debemos conocer algunos infinitos o infinitésimos equivalentes:

- $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- $\sqrt[k]{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt[k]{a_n x^n}$
- $\ln(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0) \underset{x\to+\infty}{\sim} n\ln(x)$
- $\ln(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

Por último, resumiremos en una proposición, algunos resultados interesantes que nos permiten obtener infinitésimos e infinitos equivalentes, a partir del conocimiento de órdenes de algunos otros.

Proposición 14
Sean $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ *y* $g(x) \underset{x\to a}{\sim} p(x)$ *infinitésimos:*

- *Si* $ord\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{>} ord\big(g(x)\big)$*, entonces* $\big(f(x)+g(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} \big(g(x)\big)$.
- *Si $f(x)$ no es equivalente a $g(x)$ cuando $x \to a$ (pero son comparables), entonces* $\big(f(x)-g(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} \big(h(x)-p(x)\big)$.
- $ord\big(f(x)-h(x)\big) \underset{x\to a}{>} ord\big(f(x)\big)$ *y* $ord\big(f(x)-h(x)\big) \underset{x\to a}{>} ord\big(h(x)\big)$.

Un resultado similar vale para infinitos.

Proposición 15

Sean $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ *y* $g(x) \underset{x\to a}{\sim} p(x)$ *infinitos:*

- *Si* $ord\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{>} ord\big(g(x)\big)$, *entonces* $\big(f(x)+g(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} \big(f(x)\big)$.
- *Si* $f(x)$ *no es equivalente a* $g(x)$ *para* $x \to a$ *(pero son comparables), entonces* $\big(f(x)-g(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} \big(h(x)-p(x)\big)$.

Veamos una aplicación de este resultado. Notar que en la segunda parte la hipótesis de no equivalencia debe ser minuciosamente verificada:

Ejemplo 3.3.1

1. Tratemos de calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x+2}-\sqrt{x}$. Se puede ver que se trata de una indeterminación $\infty-\infty$.
   Apelando a la formalidad, sean $f,g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{4x+2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, queremos calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x)$. Notemos que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{4x}$. Siendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{4} \neq 1$ entonces se esta en condiciones de aplicar la proposición 15 y de aquí que:
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x+2}-\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{4x}-\sqrt{x}}_{\sqrt{x}(\sqrt{4}-1)} = +\infty$$
   Observar que tuvimos que verificar la no equivalencia.

2. Tratemos de manera rápida de calcular $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+6x} - x$, podemos vernos tentados a escribir:
   $\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{x^2+6x}}_{\sim x} - x = \lim_{x\to+\infty} x-x = 0$ Resultado erróneo.
   El error se obtiene al no verificar la condición de no equivalencia, de la proposición 15. Es claro que $\sqrt{x^2+6x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ y por lo tanto no podemos aplicar el resultado.

   Veamos como se resuelve este ejemplo:
   $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+6x}-x \overset{(\star)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+6x-x^2}{\sqrt{x^2+6x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{\frac{\sqrt{x^2+6x}+x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1}_{\to 2}} = 3$$

En $(\star)$ multiplicamos y dividimos entre $\sqrt{x^2+6x}+x$.

3.4. Derivada

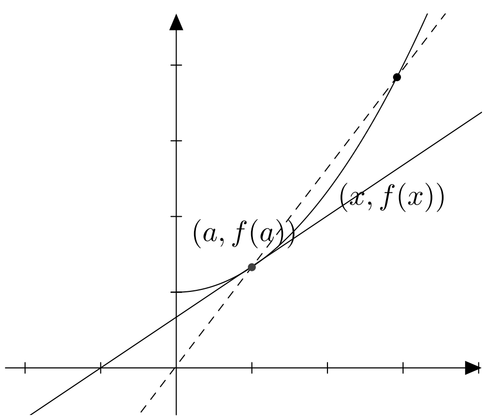
Al trabajar el concepto de derivada, a nivel de educación media se pide que a sea un punto interior del dominio, esto es, que exista un entorno de centro a incluido en el dominio X. En símbolos, $a \in int(X)$ si $\exists\, \delta > 0$ tal que $E_\delta(a) \subset X$.
El caso general será trabajado en el curso de Cálculo I.

3.4.1. Derivada puntual

Seguimos considerando $X \subset \mathbb{R}$ como unión de intervalos.

Definición 3.4.1
Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in int(X)$. Se dice que f es derivable en a si existe el límite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
En caso de que exista el límite , se anota $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *y se dice que $f'(a)$ es la derivada de f en el punto a.*

Veamos una interpretación geométrica del significado de derivada puntual.



Si definimos la función $t : X - \{a\} \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, entonces $t(x)$ representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos $\big(a, f(a)\big)$ y $\big(x, f(x)\big)$. Es claro que al ser $x \neq a$, dicha recta siempre está definida. Más aún, el límite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} t(x)$ puede interpretarse como la pendiente "límite" cuando x tiende a a de dichas rectas.

Ejemplo 3.4.1

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$. Sea $a \in \mathbb{R}$, veamos si f es derivable en a:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

   Por tanto f es derivable en todo punto de su dominio, además $f'(a) = 1$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$. Estudiemos la derivabilidad en a.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2 + 1 - a^2 - 1}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = 2a$$

   Luego f es derivable en a para todo a y $f'(a) = 2a$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$.
   Si $a > 0$, es inmediato probar que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1$ de donde $f'(a) = 1$.
   Si $a < 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = -1$, de donde $f'(a) = -1$.
   Sin embargo, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$, y como los límites laterales son distintos, f no es derivable en cero. Observemos que f es continua en cero pero no derivable porque los límites laterales son diferentes.

A continuación recordaremos una proposición muy interesante que vincula la derivabilidad con la continuidad.

Proposición 16

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ derivable en a, entonces f es continua en a.

Observación: Una consecuencia inmediata de el resultado anterior es que si una función no es continua en un punto a, entonces no es derivable en a.

Proposición 17
Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ derivables en a. Las funciones $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ y f/g (siendo $g(a) \neq 0$) son derivables en a. Además:

1. $\big(f+g\big)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $\big(f-g\big)'(a) = f'(a) - g'(a)$
3. $\big(f \cdot g\big)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
4. $\big(f/g\big)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$ *con* $g(a) \neq 0$

Proposición 18 (Regla de la cadena)
Sean $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : Y \to \mathbb{R}$, $a \in int(X)$, $b \in int(Y)$, $f(X) \subset Y$ y $f(a) = b$. Si f es derivable en a y g es derivable en b, entonces $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ es derivable en a y además $\big(g \circ f\big)'(a) = g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$.

Ejemplo 3.4.2

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (4x^2 - 6x - 5)^8$, observar que se trata de una función polinómica, pero en este caso es de suma utilidad usar la regla de la cadena. Sean $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $h(x) = 4x^2 - 6x - 5$ y $g(x) = x^8$, luego, $f(x) = g(h(x)) = (g \circ h)(x)$, de la regla de la cadena tenemos que f es derivable en a, para todo $a \in \mathbb{R}$ y además $f'(a) = g'(h(a))h'(a) = 8(4a^2 - 6a - 5)^7(8a - 6)$.
2. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f derivable en todo $a \in \mathbb{R}$ y $g(x) = f(x^2)$, $h(x) = \big(f(x)\big)^2$. Luego, $g'(a) = 2a \cdot f'(a^2)$ y $h'(a) = 2f(a)f'(a)$.

Definición 3.4.2
Sea $f : X \to \mathbb{R}$, sea $A = \{a \in X : f$ es derivable en $a\}$, definimos la función derivada de f como $f' : A \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x)$ es la derivada de f en x.

Ejemplo 3.4.3

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x^4$, ya probamos que f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $f'(x) = 12x^3$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$, aquí $f' : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ con $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Observación: Siendo $f : X \to \mathbb{R}$ derivable en a, para todo $a \in Y \subset X$, diremos que f es derivable en Y. Por ejemplo,

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x^4$, es derivable en $\mathbb{R}$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Lo anterior lo resumiremos en la siguiente tabla, donde se encontrará además las derivadas de algunas funciones particulares.

	$f+g$	$f-g$	$f \cdot g$	f/g	$f \circ g$
Derivada	$f'+g'$	$f'-g'$	$f' \cdot g + f \cdot g'$	$\dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$f'(g) \cdot g'$

Función	x^n $(\star)$	$\sqrt{x}$	$\ln(x)$	e^x
Derivada	nx^{n-1}	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{x}$	e^x

En $(\star)$, $n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ y por tanto la derivada de $\sqrt{x}$ es un caso particular cuando $n = 1/2$.

Tabla de derivadas de funciones compuestas particulares:

Función	u^n	$\sqrt{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	e^u
Derivada	$nu^{n-1}u'$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}u'$	$\dfrac{1}{u}u'$	$e^u u'$

A continuación derivaremos a modo de ejemplo ciertas expresiones que corresponden a funciones.

Ejemplo 3.4.4

1. $f(x) = \sqrt{\ln|x^2+2x+1|}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\ln|x^2+2x+1|}}\left(\ln|x^2+2x+1|\right)' \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{\ln|x^2+2x+1|}}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2+2x+1}\right) \cdot (2x+1) \end{aligned}$$

2. $g(x) = e^{\frac{x^2+6x-3}{x}}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{\frac{x^2+6x-3}{x}} \cdot \left(\frac{x^2+6x-3}{x}\right)' \\ &= e^{\frac{x^2+6x-3}{x}} \cdot \left(\frac{(2x+6)x-(x^2+6x-3)1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 17

Derivar las siguientes expresiones aplicando las reglas de derivadas.

1. $f(x) = \dfrac{3x^2-8x+4}{x^3-2x^2+5x-3}$
2. $g(x) = (6x^4+2x^3+8x-1)(x^2+4x-2)$
3. $h(x) = (x^2-x+1)\sqrt{x-2}$
4. $i(x) = \left(\dfrac{(x-1)(x^3+8x-1)}{x^3}\right)$
5. $j(x) = \left(\dfrac{(x-1)(x^3+8x-1)}{x^3}\right)^2$
6. $k(x) = x^3e^{3x+2}$
7. $l(x) = \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$
8. $m(x) = 2x^3e^{\sqrt{x^2-3x+1}}$
9. $p(x) = 2x\ln|x^3+x^2+x-1|$
10. $q(x) = \dfrac{\sqrt{\ln|x^3-2x|}}{x^2-1}$
11. $r(x) = \dfrac{e^x-3}{e^x+3}$
12. $s(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1-x}$
13. $t(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
14. $u(x) = \ln(e^{x^3+2x}+x+3)$

3.4.2. Derivada y crecimiento local

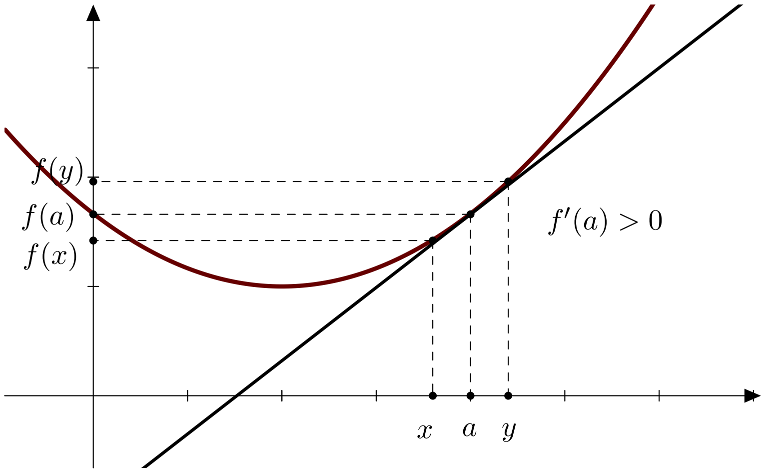
Definición 3.4.3

Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in int(X)$.

- *Decimos que f presenta un* **mínimo local o mínimo relativo** *en a si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X \cap E_{a,\delta} \Rightarrow f(x) \geq f(a)$.*
- *Decimos que f presenta un* **mínimo local estricto** *en a si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X \cap E^*_{a,\delta} \Rightarrow f(x) > f(a)$.*
- *Decimos que f presenta un* **máximo local o máximo relativo** *en a si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X \cap E_{a,\delta} \Rightarrow f(x) \leq f(a)$.*
- *Decimos que f presenta un* **máximo local estricto** *en a si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X \cap E^*_{a,\delta} \Rightarrow f(x) < f(a)$.*

Proposición 19

Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in int(X)$. *Si* f *es derivable en* a *y* $f'(a) > 0$, *entonces existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in X \cap (a - \delta, a)$, $y \in X \cap (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y)$.

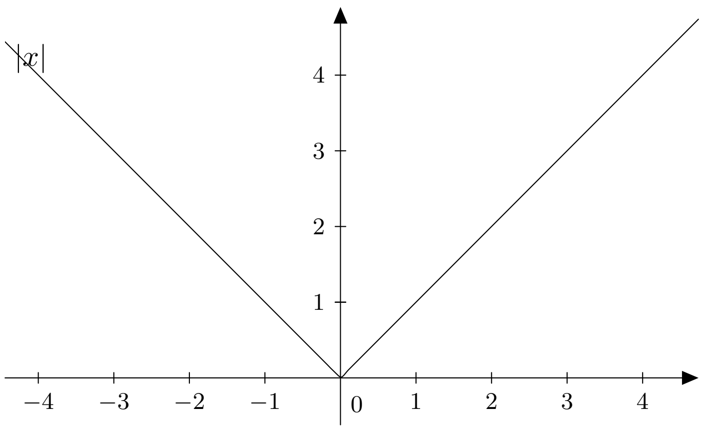


Observación: De este resultado podemos ver que si $f'(a) > 0$ entonces f es creciente en a. Un resultado análogo es válido si se tiene $f'(a) < 0$, siendo ahora f decreciente en a.

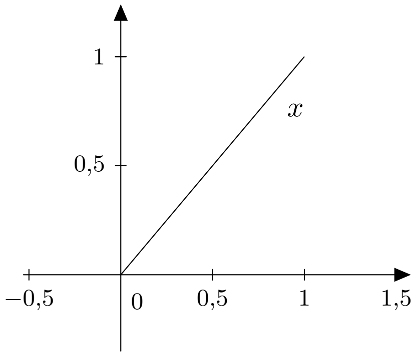
Corolario 19.1

Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X$. *Si* f *es derivable en* a *y* f *posee un máximo o un mínimo local en* a *entonces* $f'(a) = 0$.

Observación: Es claro que una función f puede presentar un máximo o mínimo local en a y no ser derivable en a, como es el ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$. Aquí f presenta un mínimo en 0, pero como ya vimos, f no es derivable en 0.



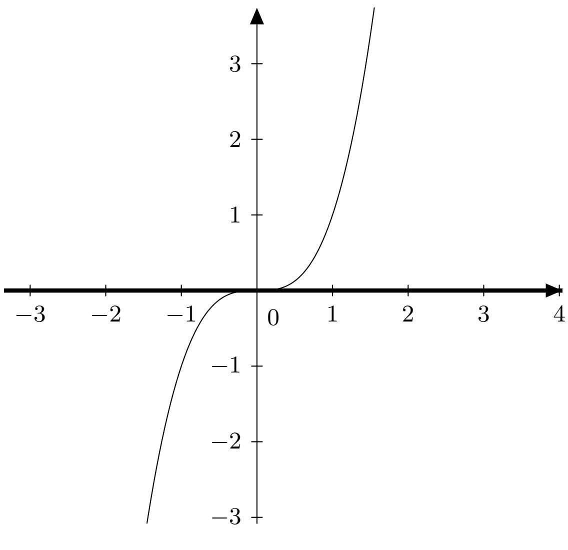
Es bueno notar que si a no es un punto interior, el resultado puede no ser válido, por ejemplo, sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$, aquí f presenta un máximo en $x = 1$ y sin embargo $f'(1) = 1 > 0$.



Proposición 20
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I.

- $f'(x) \geq 0\ \forall\ x \in I \Leftrightarrow f$ *es no decreciente en* I.
- $f'(x) \leq 0\ \forall\ x \in I \Leftrightarrow f$ *es no creciente en* I.
- *Si* $f'(x) > 0\ \forall\ x \in I \Rightarrow f$ *es creciente en* I.
- *Si* $f'(x) < 0\ \forall\ x \in I \Rightarrow f$ *es decreciente en* I.

Observación: Una función puede ser creciente y su derivada puede anularse por lo que el recíproco de las partes *iii.* y *iv.* no es válido. Como ejemplo estudiemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



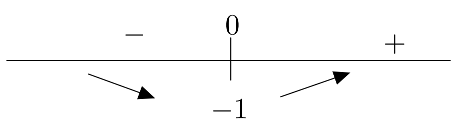
tal que $f(x) = x^3$, aquí tenemos que si $x < y$ entonces $x^3 < y^3$ y por ende f es creciente. Sin embargo $f'(x) = 2x^2$ y $f'(0) = 0$. Esto muestra que uno no puede afirmar que si una función es creciente y derivable entonces su derivada es positiva.

Corolario 20.1
Sea $f : X \to \mathbb{R}$, f continua en $a \in int(X)$ y derivable en $(a-\delta, a)$ y en $(a, a+\delta)$, para algún δ positivo.

1. *Si $f'(x) > 0 \quad \forall\ x \in (a-\delta, a)$; y $f'(x) < 0 \quad \forall\ x \in (a, a+\delta)$, entonces f presenta un máximo local en a.*
2. *Si $f'(x) < 0 \quad \forall\ x \in (a-\delta, a)$; y $f'(x) > 0 \quad \forall\ x \in (a, a+\delta)$, entonces f presenta un mínimo local en a.*

Este último resultado es de los más utilizados al resolver problemas de aplicación. Por ejemplo, tratemos de estudiar los extremos de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = xe^x$.

Aquí tenemos que f es continua y derivable (por ser producto de dos funciones derivables) y además $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $f'(x) = (x+1)e^x$ cosa que es dejada como ejercicio. Estudiemos ahora el signo de f':



Por el Corolario 20.1 tenemos que f presenta un mínimo local en $x = -1$ y este mínimo es $f(-1) = -1/e$. Siendo además $f'(x) < 0$ si $x < -1$ y $f'(x) > 0$ si $x > -1$, tenemos del Corolario 20 que f es creciente en $(-1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1)$, es decir, $-1/e$ es un mínimo absoluto de f el cual es alcanzado en $x = -1$.

3.4.3. Derivadas de orden superior

En ciertas circunstancias es de sumo interés poder derivar una función de forma reiterada, esto es, luego de derivar una función, poder derivarla otra vez y así sucesivamente. Para simplificar las ideas tomaremos el dominio de las funciones como unión de intervalos.

Definición 3.4.4 (Derivada n-ésima)

Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in int(X)$, X_1 el conjunto donde f es derivable, $f' : X_1 \to \mathbb{R}$. Si f' es derivable en a, entonces existe el límite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = f''(a)$, se dice que la derivada segunda de f en a es $f''(a)$.

Notación: Es usual anotar $f''(a) = f^{(2)}(a)$.

Análogamente a como se definió anteriormente, supongamos que se tiene definida $f^{(n-1)} : X_{n-1} \to \mathbb{R}$ y $a \in int(X_{n-1})$. Si $f^{(n-1)}$ es derivable en a, se dice que la derivada n-ésima de f en a es $\left(f^{(n-1)}\right)'(a) = f^{(n)}(a)$.

Ejemplo 3.4.5

Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3xe^{x^2+x+1}$. Entonces

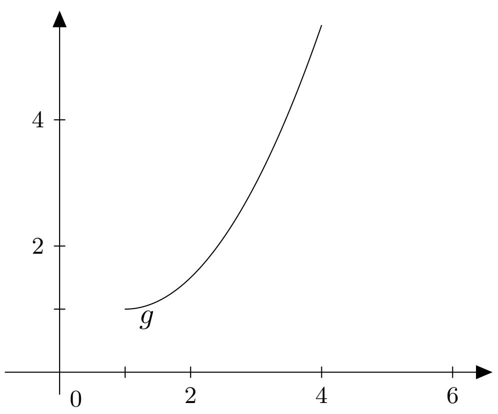
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(3xe^{x^2+x+1}\right)' \\
&= (3x)'e^{x^2+x+1} + 3x\left(e^{x^2+x+1}\right)' \\
&= 3e^{x^2+x+1} + 3x\left(e^{x^2+x+1}\right)(x^2+x+1)' \\
&= 3e^{x^2+x+1} + 3x\left(e^{x^2+x+1}\right)(2x+1) \\
&= e^{x^2+x+1}\left(3+6x^2+3x\right). \\
f''(x) &= \left(e^{x^2+x+1}(3+6x^2+3x)\right)' \\
&= \left(e^{x^2+x+1}\right)'(6x^2+3x+3) + \left(e^{x^2+x+1}\right)(6x^2+3x+3)' \\
&= \left(e^{x^2+x+1}\right)\underbrace{(2x+1)(6x^2+3x+3)}_{12x^3+12x^2+9x+3}\left(e^{x^2+x+1}\right)(12x+3) \\
&= \left(e^{x^2+x+1}\right)(12x^3+12x^2+21x+6)
\end{aligned}$$

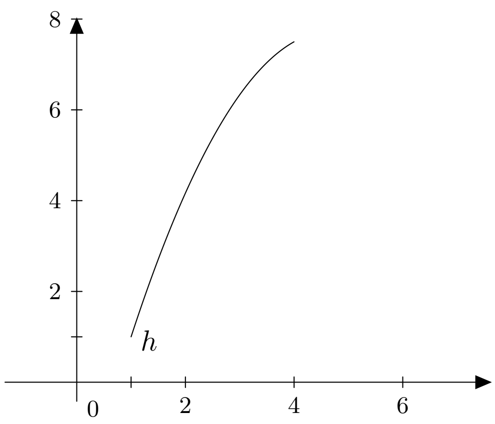
Ejemplo 3.4.6
Tomemos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = (x^2 + x)\ln(x^2 + 1)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \left((x^2 + x)\ln(x^2 + 1)\right)' \\
&= (x^2 + x)'\ln(x^2 + 1) + (x^2 + x)\left(\ln(x^2 + 1)\right)' \\
&= (2x + 1)\ln(x^2 + 1) + (x^2 + x)\frac{1}{x^2 + 1}(x^2 + 1)' \\
&= (2x + 1)\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} \\
g''(x) &= \left((2x + 1)\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}\right)' \\
&= \left((2x + 1)\ln(x^2 + 1)\right)' + \left(\frac{2x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}\right)' \\
&= (2x + 1)'\ln(x^2 + 1) + (2x + 1)\left(\ln(x^2 + 1)\right)' + \frac{(2x^3 + 2x^2)'(x^2 + 1) - (2x^3 + 2x^2)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\
&= 2\ln(x^2 + 1) + (2x + 1)\frac{1}{x^2 + 1}(2x) + \frac{(6x^2 + 4x)(x^2 + 1) - (2x^3 + 2x^2)2x}{(x^2 + 1)^2} \\
&= 2\ln(x^2 + 1) + \frac{(2x + 1)(2x)}{x^2 + 1} + \frac{2x^4 + 6x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2}
\end{aligned}
$$

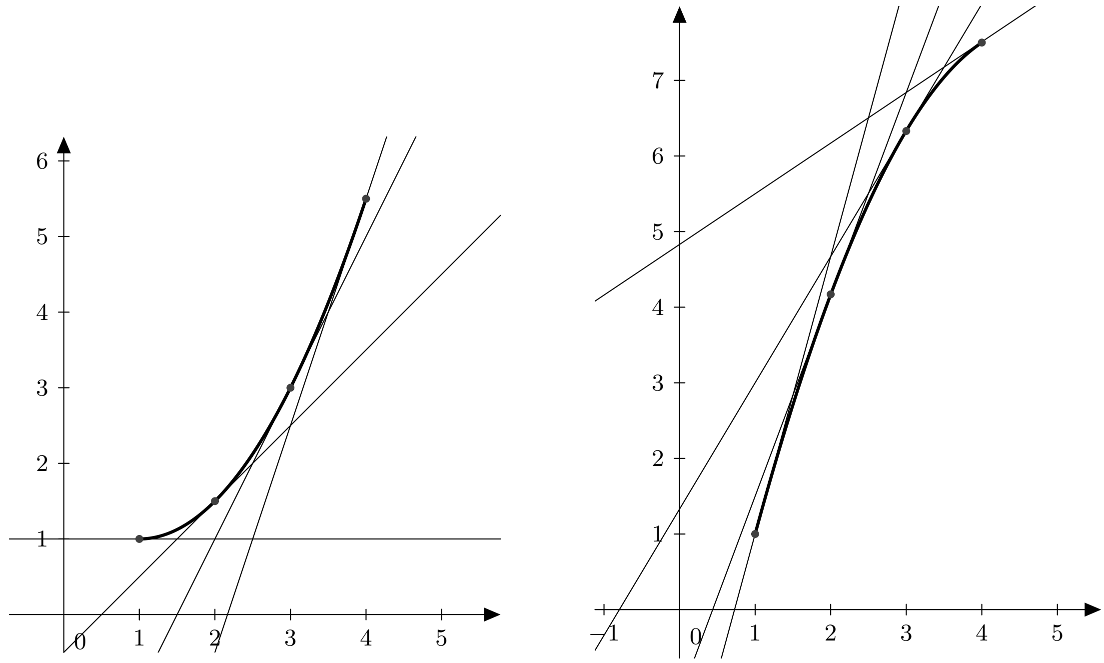
Derivada Segunda y concavidad

Consideremos los siguientes gráficos de funciones definidas en un intervalo $[a, b]$. Observar que





tanto g como h son crecientes, pero la “forma” en que crecen es diferente. Si tomamos rectas tangentes a los gráficos, se puede ver ver g tiene sus tangentes por debajo del gráfico, mientras que h tiene sus tangentes por encima del gráfico. Además, se puede ver en el gráfico de g que a medida que aumenta x, las pendientes de las rectas tangentes son decrecientes ($g'(x) < 0$) y en el gráfico de h las pendientes de las rectas tangentes son crecientes ($h'(x) > 0$). La



concavidad hace referencia a estas observaciones, claro que todo este fenómeno tiene sentido sólo localmente. En estos dos casos en el intervalo $[a, b]$, g tiene concavidad positiva y h tiene concavidad negativa.

Repasemos el principal resultado referido a lo mencionado anteriormente.

Proposición 21
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 2 veces derivable en (a, b).

1. *Si $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in [a, b]$, entonces f tiene concavidad positiva en $[a, b]$.*

2. *Si $f''(x) < 0$, $\forall\, x \in [a, b]$, entonces f tiene concavidad negativa en $[a, b]$.*

En los gráficos mostrados arriba, $g : [1, 4] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + 1$ y $h : [1, 4] \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \dfrac{-1}{2}x^2 + \dfrac{14}{3}x - \dfrac{19}{6}$.

Se tiene pues

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{2}{2}(x-1) \\
&= x-1 \\
g''(x) &= 1 > 0 && \text{concavidad positiva} \\
h'(x) &= -x + \frac{14}{3} \\
h''(x) &= -1 < 0 && \text{concavidad negativa}
\end{aligned}$$

Observación: De la proposición 21 se deduce que el signo de la derivada segunda determina la concavidad de la función.

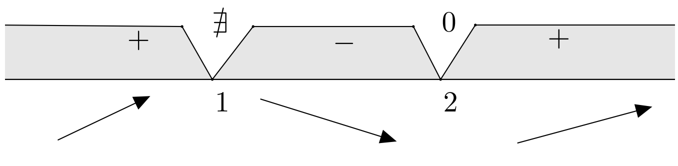
Ejemplo 3.4.7

Consideremos $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$. Estudiemos el crecimiento y la concavidad de f.

Para estudiar el crecimiento hallamos la derivada de f y estudiamos su signo.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left((x-1)e^{\frac{1}{x-1}}\right)' \\
&= (x-1)'e^{\frac{1}{x-1}} + (x-1)\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)' \\
&= e^{\frac{1}{x-1}} + (x-1)e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{1}{x-1}\right)' \\
&= e^{\frac{1}{x-1}} + (x-1)e^{\frac{1}{x-1}}\frac{-1}{(x-1)^2} \\
&= e^{\frac{1}{x-1}}\left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \\
&= e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)
\end{aligned}$$

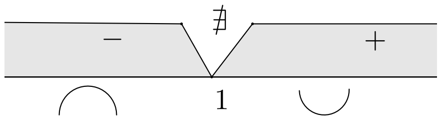
Como $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, el signo de $e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$ es igual al signo de $\dfrac{x-2}{x-1}$. Por tanto $sg\left(e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)\right)$:



Para estudiar la concavidad calculamos la derivada segunda:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left[e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)\right]' \\
&= e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)\frac{(x-2)}{(x-1)} + e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^2}\right) \\
&= e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{-x+2}{(x-1)^3}\right) + e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\left(\frac{-x+2}{x-1}+1\right) \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\left(\frac{1}{x-1}\right)
\end{aligned}$$

Notar que $\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con lo que el signo de $f''(x)$ es igual al signo de $\frac{1}{x-1}$. Por tanto la concavidad de f se puede ver en el siguiente esquema de signo



3.4.4. Reglas de L'Hopital

La regla de L'Hopital es una herramienta sumamente útil para calcular límites indeterminados bajo ciertas condiciones. La idea consiste en derivar, tanto el numerador como el denominador determinada cantidad de veces hasta que la indeterminación desaparezca.

Veamos los diferentes resultados junto con ejemplos ilustrativos.

Indeterminaciones de la forma "$\frac{0}{0}$"

Proposición 22
Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas, tal que $f(a) = g(a) = 0$, existen las derivadas $f'(a)$ y $g'(a)$, además $g'(a) \neq 0$.
Entonces existe e límite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Proposición 23
Sean f y g derivables en (a,b), $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$, $\forall\ x \in (a,b)$. Si además existe el límite $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Entonces existe el límite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Proposición 24
Sean f y g derivables si $x \to +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ si $x \to +\infty$. Si existe el límite $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Entonces existe también el límite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Indeterminaciones de la forma “$\frac{\infty}{\infty}$”

Proposición 25
Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables en (a,b), $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ en (a,b). Si existe el límite $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Entonces existe también el límite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo 3.4.8
Se considera $r : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{e^{x^2} - 1}$. Intentemos calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} r(x)$.

Observar que r puede ser considerada como el cociente de dos funciones f y g donde $f(x) = x^3 + 2x^2$ y $g(x) = e^{x^2} - 1$.

$$f(0) = 0^3 + 2(0)^2 = 0,\ f'(0) = 3(0)^2 + 4(0),\ f''(0) = 6(0) + 4 = 4$$

$$g(0) = e^0 - 1 = 0,\ g'(0) = e^0 2(0) = 0,\ g''(0) = 2e^0 + 0e^0 = 2$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 2x^2}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(0)}{g''(0)} = \frac{4}{2} = 2$$

Ejemplo 3.4.9

Sea $p:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $p(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{\ln(x)}$. Calculemos $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{\ln(x)}$.

Consideremos f y g tal que $f(x)=x^2-2x+1$ y $g(x)=\ln(x)$. Entonces

$$f(1)=0,\ f'(1)=2(1)-2=0$$

$$g(1)=\ln(1)=0,\ g'(1)=\frac{1}{(1)}=1$$

Ejemplo 3.4.10

Sea $q:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $q(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2+2}$. Calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x)$.

Observar que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\overbrace{\ln(x)}^{\to+\infty}}{\underbrace{x^2+2}_{\to+\infty}}$

Ahora $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ y $(x^2+2)'=2x$. Entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2+2}\overset{\text{l'hopital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{2x}=0$$

Ejemplo 3.4.11

Sea $r:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $r(x)=x\ln(x)$. Calculemos el $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\underbrace{x}_{\to 0}\overbrace{\ln(x)}^{\to-\infty}$. Entonces

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{l'hopital}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

Ejemplo 3.4.12

Sea $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $l(x)=\dfrac{x^3}{e^{2x}}$. Calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^{2x}}$.

$(x^3)'=3x^2,\ (3x^2)'=6x,\ (6x)'=6.$

$(e^{2x})'=2e^{2x},\ (2e^{2x})'=4e^{2x},\ (4e^{2x})'=8e^{2x}.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{x^3}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}}\overset{\text{l'hopital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{8e^{2x}}=0$$

Ejercicio 18

Calcular los siguientes límites aplicando las reglas de L'Hopital.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{e^x-x-1}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{e^{3x}-3x-1}$

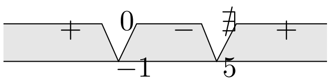
3.5. Representación gráfica

Con todo lo visto en las secciones anteriores estamos en condiciones de realizar un bosquejo de una función a partir de su expresión analítica.

Ejemplo 3.5.1

Consideremos $j:\mathbb{R}\setminus\{5\}\to\mathbb{R}$ tal que $j(x)=e^{\frac{x}{x-5}}\dfrac{x+1}{x-5}$.

1. Estudio del signo:
   $e^{\frac{x}{x-5}}>0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$ por tanto el signo de j depende solamente del signo de $\frac{x+1}{x-5}$.



2. Observar que j es continua, por tanto es de interés determinar que sucede en un entorno reducido de 5 y cuando $x\to\pm\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5^+} j(x) &= \lim_{x\to 5^+} \boxed{e^{\overbrace{\frac{x}{x-5}}^{\to+\infty}}}^{\to+\infty}\cdot\underbrace{\frac{x+1}{x-5}}_{\to+\infty}\\
&= +\infty\\
\lim_{x\to 5^-} j(x) &= \lim_{x\to 5^-} \underbrace{e^{\overbrace{\frac{x}{x-5}}^{\to-\infty}}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{x+1}{x-5}}_{\to-\infty} \qquad \text{indeterminado}
\end{aligned}$$

Para levantar esta indeterminación realicemos un cambio de variable, consideremos $z = \frac{1}{x-5}$. Esto tiene sentido dado que $x \neq 5$. Por tanto si $x \to 5^- \Rightarrow z \to \infty$. La intención es expresar el límite en función de esta nueva variable z.
Si $z = \frac{1}{x-5} \Rightarrow x = \frac{1+5z}{z}$, la expresión $\frac{x}{x-5}$ se transforma en $1+5z$ y $\frac{x+1}{x-5}$ se transforma en $1+6z$.
En resumen el límite anterior se transforma en

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z\to-\infty} \underbrace{e^{1+5z}}_{\to 0} \cdot \underbrace{(1+6z)}_{\to -\infty} \qquad \text{indeterminado} \\
&= \lim_{z\to-\infty} \frac{\overbrace{(1+6z)}^{\to -\infty}}{\underbrace{e^{-1-5z}}_{\to +\infty}} \\
&\overset{\text{ord}}{=} 0
\end{aligned}$$

Veamos lo límites infinitos:

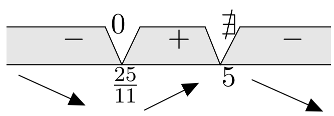
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} j(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{x-5}} \cdot \frac{x+1}{x-5} \\
&\overset{\star}{=} \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{x}} \cdot \frac{x}{x} \\
&= e
\end{aligned}$$

En $\star$ usamos que un polinomio es equivalente al término de mayor grado si $x \to \pm\infty$.

3. Derivada y crecimiento.

$$\begin{aligned}
[j(x)]' &= \left[e^{\frac{x}{x-5}} \cdot \frac{x+1}{x-5}\right]' \\
&= \left[e^{\frac{x}{x-5}}\right]' \cdot \frac{x+1}{x-5} + e^{\frac{x}{x-5}} \cdot \left[\frac{x+1}{x-5}\right]' \\
&= e^{\frac{x}{x-5}} \left(\frac{(x-5)-x}{(x-5)^2}\right)\left(\frac{x+1}{x-5}\right) + e^{\frac{x}{x-5}} \cdot \frac{(x-5)-(x+1)}{(x-5)^2} \\
&= \frac{e^{\frac{x}{x-5}}}{(x-5)^2}\left(\frac{-11x+25}{x-5}\right)
\end{aligned}$$

y su signo es

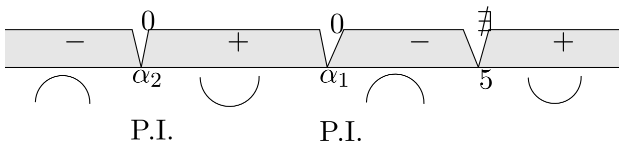


Determinamos el valor del mínimo relativo calculando su imagen por j.
$j(\frac{25}{11}) \approx -0,52$ y entonces en $x = \frac{25}{11}$ se encuentra un mínimo relativo y vale aproximadamente $-0,52$.

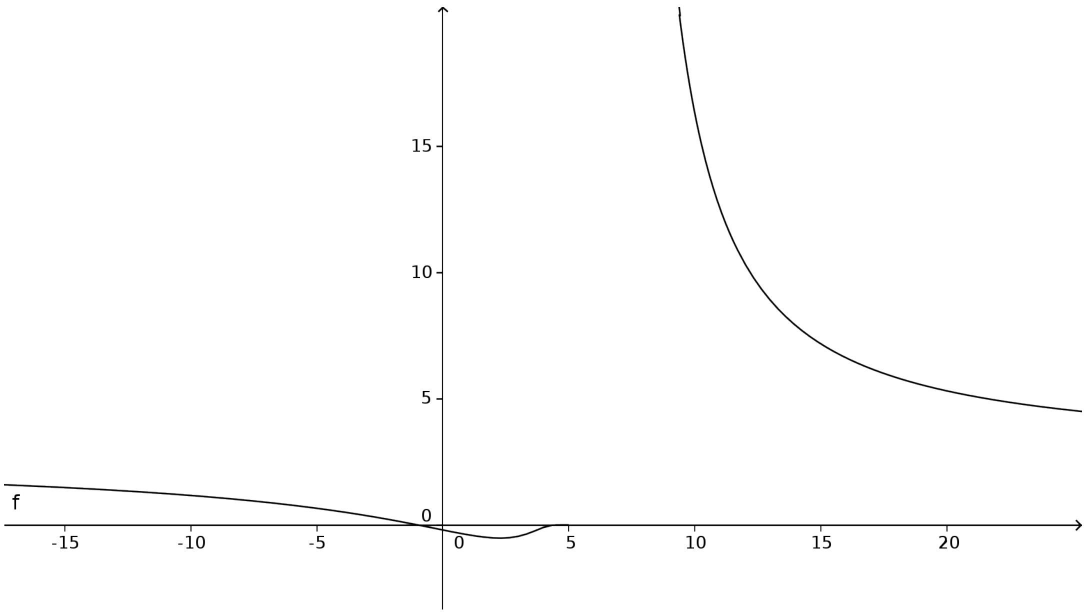
4. Derivada segunda y concavidad.
   Los cálculos intermedios quedan como ejercicio:

$$j''(x) = \frac{e^{\frac{x}{x-5}}}{(x-5)^4} \cdot \left(\frac{22x^2 - 75x - 25}{x-5} \right)$$

   y su signo es

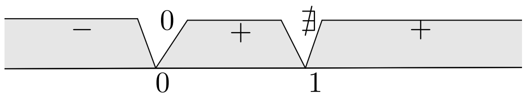


   donde $\alpha_1 \approx 3,72$ y $\alpha_2 = -0,31$. Por tanto en α_1 y en α_2 la derivada segunda vale cero y hay puntos de inflexión. $j(\alpha_1) \approx -0,20$ y $j(\alpha_2) \approx -0,14$.
   También podemos calcular los valores de α_1 y α_2 en j', cuyo significado es el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico de j en el punto.
   $j'(\alpha_1) \approx 0{,}42$ y $j'(\alpha_2) \approx -0{,}60$



Ejemplo 3.5.2
Consideremos $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}$.

- Busquemos raíces y hagamos el estudio del signo:
  Como $e^{\frac{1}{x-1}} > 0,\ sg(f) = sg\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)$. Entonces $sg(f)$:



- Calculemos algunos límites particulares:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \boxed{\frac{x}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to 0^+}}}^{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{\to +\infty} \\
&= +\infty \\
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \boxed{\frac{x}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to 0^+}}}^{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{\to 0} \qquad \text{indeterminado} \\
&\overset{z=\frac{1}{x-1}}{=} \lim_{z\to -\infty} \underbrace{e^{z}}_{\to 0} \overbrace{(z+1)z}^{\to +\infty} \\
&= \lim_{z\to -\infty} \frac{\overbrace{(z+1)z}^{\to +\infty}}{\underbrace{e^{-z}}_{\to +\infty}} \\
&\overset{\text{ord}}{=} 0 \\
\lim_{x\to \pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to \pm\infty} \boxed{\frac{x}{(x-1)^2}}^{\to 0} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{\to 1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

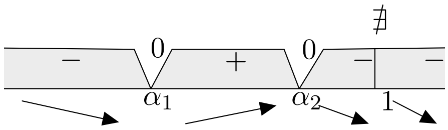
- Calculemos la derivada de f para hallar sus extremos relativos.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{x}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}\right]' \\
&= \left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)' e^{\frac{1}{x-1}} + \frac{x}{(x-1)^2}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)' \\
&= \left(\frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4}\right) e^{\frac{1}{x-1}} + \frac{x}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} \left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4}(-x^2 - x + 1)
\end{aligned}
$$

Como $\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4} > 0$, entonces el $sg(f') = sg(-x^2 - x + 1)$. Para hallar raíces igualamos a cero la última expresión: $\frac{1 \pm \sqrt{1-4(-1)1}}{-2} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$

Por tanto en α_1 hay un mínimo local y en α_2 hay un máximo local. Luego encontramos las imágenes de α_1 y α_2 para ubicarlas en el gráfico.

Haciendo las cuentas obtenemos $f(\alpha_1) \approx -0,16$ y $f(\alpha_2) \approx 0,31$.

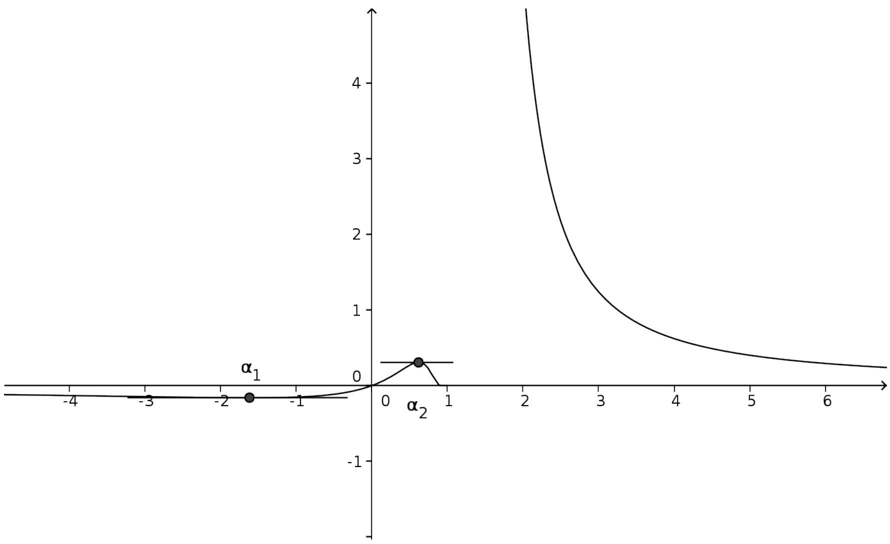


- Luego si nos interesa estudiar la concavidad de la función hallamos el signo de la derivada segunda.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left[e^{\frac{1}{x-1}}\frac{(-x^2-x+1)}{(x-1)^4}\right]' \\
&= \left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)'\frac{(-x^2-x+1)}{(x-1)^4} + e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{(-x^2-x+1)}{(x-1)^4}\right)' \\
&= e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)\left(\frac{-x^2-x+1}{(x-1)^4}\right) + e^{\frac{1}{x-1}}\left(\frac{(-2x-1)(x-1)^4+(x^2+x-1)4(x-1)^3}{(x-1)^8}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^5}\left(\frac{x^2+x-1}{x-1}+(-2x-1)(x-1)+4(x^2+x-1)\right) \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^5}\left(\frac{2x^3+4x^2-7x+2}{x-1}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^6}(2x^3+4x^2-7x+2)
\end{aligned}
$$

Como $\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^6} > 0$ si $x \neq 1$, se tiene que $sg(f''(x)) = sg(2x^3+4x^2-7x+2)$.
Ahora, como el polinomio es de grado 3 y no tiene raíces evidentes, no tenemos forma analítica de hallarlas. Por tanto no haremos el estudio de la concavidad.

- Gráfico



Ejemplo 3.5.3

Realicemos el estudio de $g : \mathbb{R} \setminus \{0,4\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = e^{\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x}}$.

- Al estudiar el signo de g, observamos que como es una exponencial, es positiva para todo valor del dominio.
- Límites particulares:

$$\lim_{x\to 4^+} g(x) = \lim_{x\to 4^+} e^{\frac{\overbrace{x^2-3x+2}^{\to 6}}{\underbrace{x^2-4x}_{\to 0^+}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-} g(x) = \lim_{x\to 4^+} e^{\frac{\overbrace{x^2-3x+2}^{\to 6}}{\underbrace{x^2-4x}_{\to 0^-}}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\overbrace{x^2-3x+2}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-4x}_{\to 0^-}}} = 0$$

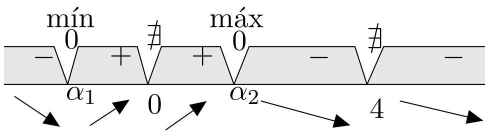
$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{\overbrace{x^2-3x+2}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-4x}_{\to 0^+}}} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to \pm\infty} g(x) &= \lim_{x\to \pm\infty} e^{\frac{\overbrace{x^2-3x+2}^{\to +\infty}}{\underbrace{x^2-4x}_{\to +\infty}}} \qquad \text{indeterminado} \\ &= \lim_{x\to \pm\infty} e^{\frac{x^2}{x^2}} = e \end{aligned}$$

- Derivada y crecimiento.

$$\begin{aligned} [g(x)]' &= \left[e^{\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x}} \right]' \\ &= e^{\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x}} \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x} \right)' \\ &= e^{\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x}} \left(\frac{(2x-3)(x^2-4x)-(x^2-3x+2)(2x-4)}{(x^2-4x)^2} \right) \\ &= e^{\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x}} \left(\frac{-x^2-4x+8}{(x^2-4x)^2} \right) \end{aligned}$$

Por tanto el $sg(f') = sg(-x^2 - 4x + 8)$. Y siendo $\alpha_1 = -2 - 2\sqrt{3}$ y $\alpha_2 = -2 + 2\sqrt{3}$, su esquema de signo se muestra a continuación.



- El cálculo de la derivada segunda y la representación gráfica es dejado como ejercicio.

Ejercicio 19

Realizar el estudio analítico y representación gráfica de las siguientes funciones:

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^2$.
2. $g : \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| - x$.
3. $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = (x+2)e^{\frac{x-3}{x}}$.
4. $i : [-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = x\sqrt{x+2}$.

Bibliografía

[1] **Friedberg**, *Linear Algebra.* Prentice Hall.

[2] **Kudriávtsev**, *Curso de Análisis Matemático.* Ed. Mir Moscú.

[3] **Giovaninni**, *Funciones Reales.*

[4] **Siberio**, *Ficha N° 1: Álgebra 1.* Centro de Impresiones y Publicaciones del CEIPA.

[5] **Barberis**, *Ingreso 2011 Área Matemática.* Universidad Nacional de Río Cuarto, Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químicas y Naturales.