Examen de Lógica

26 de Julio de 2016

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **100** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ y los lenguajes $L_1, L_2, L_3 \subset \Sigma^*$ definidos como:

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* / \; cant_b(w) = 0\}$
- I $\varepsilon \in L_2$
  II Si $w \in L_2$ entonces $aw \in L_2$
  III Si $w \in L_2$ entonces $acw \in L_2$
- I $\varepsilon \in L_3$
  II Si $w \in L_3$ entonces $aw \in L_3$
  III Si $w \in L_3$ entonces $bcw \in L_3$

a. Defina siguiendo el esquema de recursión primitiva las funciones: $cant_b \colon \Sigma^* \to \mathbb{N}$ y $cant_c \colon \Sigma^* \to \mathbb{N}$
(ej: $cant_b(babc) = 2$ y $cant_c(babc) = 1$)

b. Demuestre que $L_2 \subseteq L_1$.

c. Demuestre $L_1 \nsubseteq L_3$

d. Sea $\mathcal{M} = \langle C, R \rangle$ donde
$C = \Sigma^* - (L_1 \cup L_3)$ y
$R = \{w \in C : cant_b(w) = cant_c(w)\}$
Demuestre que: $\mathcal{M} \not\models \neg P_1(x)$

Bosquejo de solución

a.

$$
\begin{aligned}
&cant_b(\varepsilon) \;\; :=0\\
&cant_b(xw) := \text{si } x = b \text{ entonces } 1 + cant_b(w) \text{ sino } cant_b(w)\\
&cant_c(\varepsilon) \;\; :=0\\
&cant_c(xw) := \text{si } x = c \text{ entonces } 1 + cant_b(w) \text{ sino } cant_c(w)
\end{aligned}
$$

b. Para justificar que $L_2 \subseteq L_1$ probaremos que

$$(\bar{\forall} w \in L_2) w \in L_1.$$

Se probará la siguiente propiedad $\mathcal{P}$ sobre L_2a:

$$\mathcal{P}(w) := w \in L_1$$

Caso base: $\mathcal{P}(\varepsilon)$.

$$\begin{array}{l} \varepsilon \in L_1 \\ \Leftarrow \text{(def.)} \\ cant_b(\varepsilon) = 0 \\ \Leftarrow \text{(def.)} \\ 0 = 0, \end{array}$$

y esto último es obvio.

Caso inductivo: si $\mathcal{P}(w)$ entonces $\mathcal{P}(aw)$.

$$\begin{array}{l} aw \in L_1 \\ \Leftarrow \text{(def.)} \\ cant_b(aw) = 0 \\ \Leftarrow \text{(def. y } a \neq b) \\ cant_b(w) = 0 \\ \Leftarrow \text{(def.)} \\ w \in L_1, \end{array}$$

y esto último vale por ser la HI.

Caso inductivo: si $\mathcal{P}(w)$ entonces $\mathcal{P}(acw)$.

$$\begin{array}{l} acw \in L_1 \\ \Leftarrow \text{(def.)} \\ cant_b(acw) = 0 \\ \Leftarrow \text{(def. y } a \neq b) \\ cant_b(cw) = 0 \\ \Leftarrow \text{(def. y } c \neq b) \\ cant_b(w) = 0 \\ \Leftarrow \text{(def.)} \\ w \in L_1, \end{array}$$

y esto último vale por ser la HI.

Hemos probado las hipótesis del PIP para L_2. Por lo tanto,

$$(\bar{\forall} w \in L_2) w \in L_1,$$

o lo que es lo mismo,

$$L_2 \subseteq L_1.$$

c. Para justificar que $L_1 \not\subseteq L_3$ probaremos que $c \in L_1$ y que $c \notin L_3$.

$c \in \boldsymbol{L_1}$

$$\begin{array}{l} c \in L_1 \\ \Leftarrow \text{(def.)} \\ cant_b(c) = 0 \\ \Leftarrow \text{(def. y } c \neq b) \\ cant_b(\varepsilon) = 0 \\ \Leftarrow \text{(def.)} \\ 0 = 0, \end{array}$$

y esto último es obvio.

$c \notin \boldsymbol{L_3}$ Un análisis de los distintos casos de formación posibles para L_3 basta.

a) Si la última regla usada fuera la primera regla, entonces debería cumplirse $\varepsilon = c$; pero estas dos palabras son diferentes.

b) Si la última regla usada fuera la segunda regla, entonces debería cumplirse $aw = c$; pero estas dos palabras son diferentes porque $a \neq c$.

c) Si la última regla usada fuera la tercera regla, entonces debería cumplirse $bcw = c$; pero estas dos palabras son diferentes porque $b \neq c$.

d. Recordamos que Σ^* se forma con las siguientes reglas:

a) $\varepsilon \in \Sigma^*$

b) si $w \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$, entonces $xw \in \Sigma^*$

Ahora mostraré que $bac \in C$.

$bac \in \Sigma^*$ La siguiente secuencia de formación justifica este juicio.

a) $\varepsilon \in \Sigma^*$, aplicando la primera regla.

b) $c \in \Sigma^*$, aplicando la segunda regla a la palabra recién obtenida y a la letra $c \in \Sigma$.

c) $ac \in \Sigma^*$, aplicando la segunda regla a la palabra recién obtenida y a la letra $a \in \Sigma$.

d) $bac \in \Sigma^*$, aplicando la segunda regla a la palabra recién obtenida y a la letra $b \in \Sigma$.

$bac \notin \boldsymbol{L_1}$

$$\begin{array}{l} bac \notin L_1 \\ \Leftarrow \text{(def.)} \\ cant_b(bac) > 0 \\ \Leftarrow \text{(def. y } b = b) \\ 1 + cant_b(ac) > 0, \end{array}$$

y esto vale por propiedades de los naturales.

$bac \notin \boldsymbol{L_3}$ Un análisis de los distintos casos de formación posibles para L_b basta.

a) Si la última regla usada fuera la primera regla, entonces debería cumplirse $\varepsilon = bac$; pero estas dos palabras son diferentes.

b) Si la última regla usada fuera la segunda regla, entonces debería cumplirse $aw = bac$; pero estas dos palabras son diferentes porque $a \neq b$.

c) Si la última regla usada fuera la tercera regla, entonces debería cumplirse $bcw = bac$; pero estas dos palabras son diferentes porque $a \neq c$.

Finalmente, la prueba de que $\mathcal{M} \not\models \neg P_1(x)$.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \not\models \neg P_1(x) \\
\Leftarrow \text{(clausura)} \\
\mathcal{M} \not\models (\forall x)\neg P_1(x) \\
\Leftarrow \text{(2,4,5)} \\
(\bar{\exists} u \in C)\mathcal{M} \not\models \neg P_1(\bar{u}) \\
\Leftarrow \\
\mathcal{M} \not\models \neg P_1(\overline{bac}) \\
\Leftarrow \text{(2,4,5)} \\
\mathcal{M} \models P_1(\overline{bac}) \\
\Leftarrow \text{(def.)} \\
cant_b(bac) = cant_c(bac) \\
\Leftarrow \text{(def. y } b = b \text{ y } b \neq c\text{)} \\
1 + cant_b(ac) = cant_c(ac) \\
\Leftarrow \text{(def. y } a \neq b \text{ y } a \neq c\text{)} \\
1 + cant_b(c) = cant_c(c) \\
\Leftarrow \text{(def. y } c \neq b \text{ y } c = c\text{)} \\
1 + cant_b(\varepsilon) = 1 + cant_c(\varepsilon) \\
\Leftarrow \text{(def.)} \\
1 + 0 = 1 + 0,
\end{array}$$

y esto es obvio.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Sea $||\Gamma||$ el conjunto de todas las valuaciones v tales que $v(\Gamma) = 1$ y

$X = \{ \; p_i \mid i \; \geq \; 3 \; \}$

a. Hallar n, la cantidad de elementos de $||X||$. Justifique su respuesta.
b. Determine si existe $\varphi \in \texttt{PROP}$ tal que la cantidad de elementos de $||X \cup \{\varphi\}||$ es dos. Justifique su respuesta.
c. Determine la cantidad de elementos $||X \cup \{(p_0 \wedge (p_1 \vee p_2))\}||$. Justifique su respuesta.
d. Demuestre que $X \nvdash \neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$.

Bosquejo de solución

a. Una valuación w queda definida por el valor que toma en las letras proposicionales. Si $w \in ||X||$, entonces todo i natural debe cumplir que $w(p_{3+i}) = 1$. Por otra parte, los valores que esa valuación tome en las letras p_0, p_1, p_2 es irrelevante a los fines de determinar su pertenencia a $||X||$, ya que esas letras no aparecen en el conjunto. Existen ocho formas posibles de asignar valores de verdad a esas letras, y por lo tanto $n = 8$.
b. Sea
$$\varphi := p_1 \wedge p_2.$$
Observemos que $w(p_1 \wedge p_2) = 1$ sii $w(p_1) = 1$ y $w(p_2) = 1$. Por lo tanto, si $w \in ||X \cup \{\varphi\}\,||$ todo i natural debe cumplir que $w(p_{1+i}) = 1$. Por otra parte, los valores que esa valuación tome en la letra p_0 es irrelevante a los fines de determinar su pertenencia a $||X \cup \{\varphi\}\,||$, ya que esa letra no aparece en el conjunto. Existen dos formas posibles de asignar valores de verdad a esa letra, y por lo tanto la cantidad de elementos de $||X \cup \{\varphi\}\,||$ es $2 = \frac{n}{4}$.
c. Observemos que $w(p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)) = 1$ sii $w(p_0) = 1$ y $w(p_1 \vee p_2) = 1$. Por lo tanto, si $w \in ||X \cup \{p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)\}\,||$ todo i natural debe cumplir que $w(p_{3+i}) = 1$, y además $w(p_0) = 1$. Por otra parte, los valores que esa valuación tome en las letras p_1, p_2 deben garantizar que $w(p_1 \vee p_2) = 1$. Existen tres formas posibles de asignar valores de verdad a p_1, p_2 con esa condición, y por lo tanto la cantidad de elementos de $||X \cup \{p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)\}\,||$ es tres.
d. De la primera parte sabemos que X es satisfacible, y por lo tanto es consistente. Probaré que si $X \vdash \neg p_2 \vee (\neg p_5 \vee \neg p_8)$, entonces $X \vdash \bot$, contradiciendo lo afirmado en la primera parte.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg p_2 \vee (\neg p_5 \vee \neg p_8)$}
\AxiomC{$[\neg p_2]^1$}
\AxiomC{p_2}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$[\neg p_5 \vee \neg p_8]^1$}
\AxiomC{$[\neg p_5]^2$}
\AxiomC{p_5}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$[\neg p_8]^2$}
\AxiomC{p_8}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$E\vee^2$}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$E\vee^1$}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\end{prooftree}
$$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1, 2; 1, 2; 1 \rangle$, y las siguientes fórmulas:

- $\varphi := P(f(z)) \to \neg P(x)$
- $\psi := (\forall x)P(x)$

a. De $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi$. Justifique su respuesta.
b. Demuestre que $\{\varphi, \psi\} \vdash \bot$
c. Demostrar que $\varphi \vdash \neg(\forall x)P(x)$
d. Demostrar que $(\exists z)f(z) =' c, (\forall x)(\forall y)(Q(x,y) \to (\forall z)z =' c) \vdash (\forall x)(\forall y)(Q(x,y) \to (\exists z)g(x,y) =' f(z))$

Nota: En b, c y d NO son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Bosquejo de solución

a. Sea $\mathcal{M}$ una estructura cualquiera en la que $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$ Probaremos que $\mathcal{M} \models \varphi$

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models P(f(z)) \to \neg P(x) \Leftrightarrow \text{(Clausura)} \\
\mathcal{M} \models \forall x \forall z (P(f(z)) \to \neg P(x)) \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} ab \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models (P(f(\bar{a})) \to \neg P(\bar{b})) \Leftrightarrow \text{(Definición } \models) \\
(\bar{\forall} ab \in |\mathcal{M}|) : v^{\mathcal{M}}(P(f(\bar{a})) \to \neg P(\bar{b})) = 1 \Leftrightarrow \text{(Definición } v^{\mathcal{M}}) \\
(\bar{\forall} ab \in |\mathcal{M}|) : \text{máx}\{1 - v^{\mathcal{M}}(P(f(\bar{a}))), v^{\mathcal{M}}(\neg P(\bar{b}))\} = 1
\end{array}$$

La última expresión vale 1 ya que $P^{\mathcal{M}}$ es el conjunto vacío y por lo tanto para todo a se cumple que $f(\bar{a})^{\mathcal{M}} \notin P^{\mathcal{M}}$ y $v^{\mathcal{M}}(P(f(\bar{a}))) = 0$ (por definición de $v^{\mathcal{M}}$).

La estructura pedida puede ser: $\langle \{\bullet\}, \emptyset, \emptyset, f, g, \bullet \rangle$ donde f y g se definen de la única forma posible (para un universo de un solo valor).

b. Escribiremos una derivación $\varphi, \psi \vdash \bot$:

$$\dfrac{\dfrac{(\forall x)P(x)}{P(x)}\,E_\forall^{*2} \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)P(x)}{P(f(z))}\,E_\forall^{*1} \quad P(f(z) \to \neg P(x))}{\neg P(x)}\,E_\to}{\bot}\,E_\neg$$

***1** $f(z)$ libre para x en $P(x)$

***2** x libre para x en $P(x)$

c. Tomamos el árbol de la parte anterior y aplicamos $I_\neg$ descargando la hipótesis $(\forall x)P(x)$:

$$\begin{array}{c}
[(\forall x)P(x)]^{(1)} \quad P(f(z)) \to \neg P(x) \\
\vdots \\
\dfrac{\bot}{\neg(\forall x)P(x)}\,I_\neg^{(1)}
\end{array}$$

El árbol completo queda así:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall x)P(x)]^{(1)}}{P(x)}\,E_\forall^{*2} \qquad \dfrac{\dfrac{[(\forall x)P(x)]^{(1)}}{P(f(z))}\,E_\forall^{*1} \quad P(f(z) \to \neg P(x))}{\neg P(x)}\,E_\to}{\bot}\,E_\neg}{\neg(\forall x)P(x)}\,I_\neg^{(1)}$$

d.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\exists z)f(z) =' c$}
\AxiomC{$[Q(x,y)]^{(1)}$}
\AxiomC{$(\forall x)(\forall y)(Q(x,y) \to (\forall z)z =' c)$}
\RightLabel{$E_{\forall}^{*1}$}
\UnaryInfC{$(\forall y)(Q(x,y) \to (\forall z)z =' c)$}
\RightLabel{$E_{\forall}^{*2}$}
\UnaryInfC{$Q(x,y) \to (\forall z)z =' c$}
\RightLabel{$E_{\to}$}
\BinaryInfC{$(\forall z)z =' c$}
\RightLabel{$E_{\forall}^{*3}$}
\UnaryInfC{$g(x,y) =' c$}
\AxiomC{$[f(z) =' c]^{(2)}$}
\RightLabel{IR_2}
\UnaryInfC{$c =' f(z)$}
\RightLabel{IR_3}
\BinaryInfC{$g(x,y) =' f(z)$}
\RightLabel{$I_{\exists}^{*4}$}
\UnaryInfC{$(\exists z)g(x,y) =' f(z)$}
\RightLabel{$E_{\exists}^{*5}\ (2)$}
\BinaryInfC{$(\exists z)g(x,y) =' f(z)$}
\RightLabel{$I_{\to}^{(1)}$}
\UnaryInfC{$(Q(x,y) \to (\exists z)g(x,y) =' f(z))$}
\RightLabel{$I_{\forall}^{*6}$}
\UnaryInfC{$\forall x(Q(x,y) \to (\exists z)g(x,y) =' f(z))$}
\RightLabel{$I_{\forall}^{*7}$}
\UnaryInfC{$\forall y \forall x(Q(x,y) \to (\exists z)g(x,y) =' f(z))$}
\end{prooftree}
$$

Las condiciones son:

***1** x libre para x en ....

***2** x libre para x en ....

***3** $g(x,y)$ libre para z en $(\forall z)z =' c$

***4** z libre para z en ....

***5** z no aparece libre en:

- $(\exists z)g(x,y) =' f(z)$ (conclusión)
- $Q(x,y)$ (premisa)
- $\forall x \forall y(Q(x,y) \to (\forall z)z =' c)$ (premisa)

***6** x no aparece libre en:

- $(\exists z)f(z) =' c$
- $\forall x \forall y(Q(x,y) \to (\forall z)z =' c)$

***7** y no aparece libre en:

- $(\exists z)f(z) =' c$
- $\forall x \forall y(Q(x,y) \to (\forall z)z =' c)$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 2; 1; 1 \rangle$

a. Determine si las siguientes propiedades son correctas, justifique su respuesta.

  I. El conjunto de sentencias $\{\varphi \in \texttt{SENT} \mid \ \vdash \varphi\}$ es una teoría.

  II. El conjunto de sentencias $\{\varphi \in \texttt{SENT} \mid \ \vdash \neg\varphi\}$ es una teoría.

  III. Existe una única teoría T tal que $\text{Mod}(T) = \emptyset$.

b. Sea $\Gamma = Th(Mod(\{(\exists y)\neg P(f(y), y)\}))$, probar que $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \notin \Gamma$.

c. Hallar tres sentencias no equivalentes que pertenezcan a Γ.

Bosquejo de solución

a. *a)* **Correcta.** Sea Γ_1 el conjunto dado y ψ una sentencia. Si $\Gamma_1 \vdash \psi$ debe haber una derivación de ψ a partir de premisas de Γ_1. Ahora bien, cada una de esas premisas es un teorema debido a la definición de Γ_1, y puedo completar la prueba colocando las derivaciones que lo justifican de forma que las premisas sean conclusiones de las mismas. De esta forma, construyo una prueba de ψ sin premisas, de donde $\vdash \psi$ y $\psi \in \Gamma_1$. Esto concluye la prueba.

b) **Incorrecta.** Sea Γ_2 el conjunto dado. Observemos que $(\forall x_1)x_1 =' x_1 \notin \Gamma_2$, ya que no empieza con una negación. Sin embargo, $\Gamma_2 \vdash (\forall x_1)x_1 =' x_1$, y por lo tanto no es una teoría.

$$\dfrac{\dfrac{}{x_1 =' x_1}\, RI1}{(\forall x_1)x_1 =' x_1}\, I\forall^*$$

* No hay hipótesis, y por tanto no tienen ninguna variable libre.

c) **Correcta.**

$$
\begin{array}{l}
Mod T = \emptyset \\
\Rightarrow \text{(construcción de modelo)} \\
T \vdash \bot \\
\Rightarrow (E\bot) \\
(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{SENT})T \vdash \varphi \\
\Rightarrow \text{(def. teoría)} \\
(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{SENT})\varphi \in T \\
\Rightarrow \text{(def. teoría)} \\
T = \mathtt{SENT}.
\end{array}
$$

Hemos probado que si T fuera teoría, debe ser $\mathtt{SENT}$. Nos falta mostrar que $\mathtt{SENT}$ es teoría.
Consideremos $\varphi \in \mathtt{SENT}$ tal que $\mathtt{SENT} \vdash \varphi$. Obviamente, $\varphi \in \mathtt{SENT}$. Esto concluye la prueba.

b.

$$
\begin{array}{l}
(\forall x)(\forall y)P(x,y) \notin \Gamma \\
\Leftarrow \text{(def.)} \\
(\bar{\exists}\mathcal{M} \in Mod\{(\exists y)\neg P(f(y),y)\})\mathcal{M} \not\models (\forall x)(\forall y)P(x,y) \\
\Leftarrow \\
(\bar{\exists}\mathcal{M})\mathcal{M} \models (\exists y)\neg P(f(y),y)\mathcal{M} \not\models (\forall x)(\forall y)P(x,y)
\end{array}
$$

Tomo como estructura $\mathcal{M}$ una con universo unitario $\{\circ\}$, relación binaria $\emptyset$, función unaria F (única elección posible) y otras relaciones, funciones y elementos distinguidos razonables para compartir el tipo de similaridad usado. Luego,

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models (\exists y)\neg P(f(y),y) \\
\Leftarrow (2,4,5) \\
\mathcal{M} \models \neg P(f(\bar{\circ}),\bar{\circ}) \\
\Leftarrow (2,4,5) \\
\mathcal{M} \not\models P(f(\bar{\circ}),\bar{\circ}) \\
\Leftarrow (def.) \\
\langle F(\circ),\circ\rangle \notin \emptyset,
\end{array}
$$

y esto último es obvio.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \not\models (\forall x)(\forall y)P(x,y)\\
&\Leftarrow \text{(2,4,5)}\\
&\mathcal{M} \not\models P(\bar{\circ},\bar{\circ})\\
&\Leftarrow (\textit{def.})\\
&\langle \circ,\circ\rangle \in \emptyset,
\end{aligned}$$

y esto último es obvio.

c. Defino

$$\begin{aligned}
&\alpha{:=}\neg\bot\\
&\beta{:=}(\exists y)\neg P(f(y),y)\\
&\gamma{:=}(\exists y)(\exists x)\neg P(x,y)
\end{aligned}$$

Primero, mostraré la pertenencia a Γ de las oraciones elegidas. Observe que

$$\begin{aligned}
&\varphi \in \Gamma\\
&\Leftarrow \text{(def.)}\\
&(\bar{\forall}\mathcal{M} \in Mod\{(\exists y)\neg P(f(y),y)\})\mathcal{M} \models \varphi\\
&\Leftarrow\\
&(\bar{\forall}\mathcal{M})\mathcal{M} \models (\exists y)\neg P(f(y),y)\mathcal{M} \models \varphi\\
&\Leftarrow \text{(2,4,5)}\\
&(\bar{\forall}\mathcal{M})\mathcal{M} \models (\exists y)\neg P(f(y),y) \to \varphi.
\end{aligned}$$

$\alpha \in \Gamma$

$$\dfrac{\dfrac{[\bot]^1}{\alpha}\ I\neg^1}{(\exists y)\neg P(f(y),y)\to\alpha}\ I\to$$

$\beta \in \Gamma$

$$\dfrac{[\beta]^1}{(\exists y)\neg P(f(y),y)\to\beta}\ I\to^1$$

$\gamma \in \Gamma$

$$\dfrac{\dfrac{[(\exists y)\neg P(f(y),y)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg P(f(y),y)]^2}{(\exists x)\neg P(x,y)}\ I\exists^{***}}{\gamma}\ I\exists^{**}}{\gamma}\ E\exists^*_2}{(\exists y)\neg P(f(y),y)\to\gamma}\ I\to_1$$

* γ es una fórmula cerrada, y por lo tanto no tiene ninguna ocurrencia libre de variables. Además, la única hipótesis sin cancelar es la correspondiente al existe a eliminar.

** El término y está libre para y en cualquier fórmula.

*** La fórmula $\neg P(f(y),y)$ es abierta, por lo que todo término esta libre para cualquier variable en ella.

Ahora mostraré que $\alpha \not\models \beta, \alpha \not\models \gamma, \beta \not\models \gamma$.

Considero las estructuras $\mathcal{M}_1 = \langle\{\circ\}, \{(\circ,\circ)\}, f(\circ)=\circ, \circ\rangle$ y $\mathcal{M}_2 = \langle\{\circ,\bullet\}, \{(\circ,\circ),(\bullet,\bullet)\}\, g, \circ\rangle$ donde $g(\circ)=\bullet$ y $g(\bullet)=\circ$

$M_1 \models \alpha$ pero $M_1 \not\models \beta$. Lo primero se desprende de que α es verdad lógica. Lo segundo pues $\langle f(\circ),\circ\rangle \in \{(\circ,\circ)\}$

$M_2 \models \alpha$ pero $M_1 \not\models \gamma$. Lo primero se desprende de que α es verdad lógica. Lo segundo pues:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \not\models (\exists y)(\exists x)\neg P(x,y) \\ \Leftarrow_{(2,4,5)} \\ ((\bar{\forall} a) \in |M|)((\bar{\forall} b) \in |M|)\mathcal{M} \models P(\bar{a},\bar{b}) \\ \Leftarrow_{(def.)} \\ \langle \circ, \circ \rangle \in \{(\circ, \circ)\} \end{array}$$

Alcanza con mostrar una estructura que modele a una de ellas pero no a la otra. $M_2 \models \gamma$ pues $(\circ, \circ) \notin \{(\circ, \bullet), (\bullet, \circ)\}$

Por otra parte, $M_2 \not\models \beta$ pues $(g(\circ), \circ)) \in \{(\circ, \bullet), (\bullet, \circ)\}$ y $(g(\bullet), \bullet)) \in \{(\circ, \bullet), (\bullet, \circ)\}$