Segundo parcial de Lógica

2 de julio 2012

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad $\langle -; 1, 2; 1\rangle$, con símbolos de función f_1, f_2 y símbolo de constante c_1.

Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \mathsf{S}, +, 0\rangle$ la estructura de los naturales con las funciones de sucesor y suma, y el cero.

a. Defina inductivamente el lenguaje $\mathtt{TERM}_C$ de los términos cerrados adecuados.

b. Demuestre por inducción que $(\overline{\forall} t \in \mathtt{TERM}_C)((\overline{\exists} u \in \mathtt{TERM}_C)(\mathcal{N} \models t =' f_1(u) \vee t =' c_1))$

Ejercicio 2 (15 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad $\langle 1, 1, 2; 1; 0\rangle$, con símbolos de relación P_1, P_2, P_3 y símbolo de función f_1.

a. Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \mathsf{Par}, \mathsf{Impar}, \leq, F\rangle$ la estructura de los naturales con las relaciones "ser par", "ser impar", "menor o igual".

   Proporcione sentencias φ_1 y φ_2 que formalicen las siguientes nociones:

   I. F es decreciente.

   II. F aplicada a impares devuelve pares, y recíprocamente, aplicada a pares devuelve impares.

   Demuestre que las interpretaciones de φ_1 y φ_2 en $\mathcal{N}$ se corresponden con las nociones anteriores.

b. Muestre que $\mathcal{N} \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$, siendo $\mathcal{N}$ la misma estructura de la parte anterior.

c. Encuentre una estructura $\mathcal{M}_1$ tal que $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$ y $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash \quad ((\forall y) f(y) =' g(y) \wedge (\exists x) f(x) =' c_0) \to (\exists x) c_0 =' g(x)$

b. $\vdash \quad (\forall z)((P(z) \vee Q(z)) \to z =' c_0) \to ((\forall x)(P(x) \to x =' c_0) \wedge (\forall y)(Q(y) \to y =' c_0))$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas. (Se sugiere utilizar la hoja horizontalmente)

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 2; 1; 0 \rangle$ con símbolo de predicado P, símbolo de función f y el siguiente conjunto de estructuras de ese tipo de similaridad:
$\mathcal{K} = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, R, F \rangle$ y F es una función inyectiva y $F \subseteq R\}$

a. Defina por extensión un conjunto de sentencias Γ tal que $Th(\mathcal{K}) = \texttt{CONS}(\Gamma)$.

b. Defina un conjunto de estructuras $\mathcal{K}_2$ tal que $\mathcal{K}_2 \neq \emptyset$ y $\texttt{CONS}(\Gamma) \subset Th(\mathcal{K}_2)$, siendo Γ el definido en la parte a. Justifique

c. Defina un conjunto de estructuras $\mathcal{K}_3$ tal que tal que $SENT \subseteq Th(\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_3)$ y $\mathcal{K}_3 \neq \emptyset$. Justifique.