

### 5.0 INTRODUCCION

El lector probablemente esté familiarizado con el estudio de algunos tipos particulares de curvas dadas en forma implícita, es decir a partir de ecuaciones del tipo  $f(x,y) = 0$ . Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia es  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

Adoptaremos aquí un enfoque diferente: el estudio de curvas en forma paramétrica. Partimos para ello del concepto intuitivo de que una curva es un objeto "de dimensión 1" en el plano o en el espacio.

El ejemplo más sencillo es el de una recta en el espacio, que puede describirse mediante las ecuaciones paramétricas

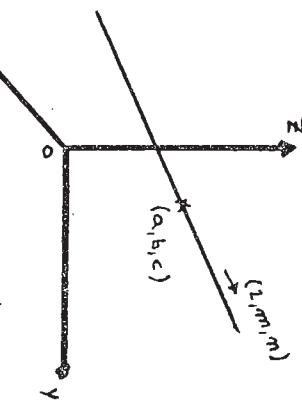
$$\begin{cases} x = a + lt \\ y = b + mt \\ z = c + nt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(ver curso de Algebra Lineal).

Es decir que las coordenadas de puntos de la recta se obtienen como función de un parámetro  $t \in \mathbb{R}$ .

Para extender la idea a curvas más generales en el espacio, es natural considerar funciones más generales  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , con  $t$  variable en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

Este será el enfoque que adoptaremos a continuación, en el que se pliega a veces una curva como una función de  $I \subset \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$ .



Por otra parte, el teorema de la función implícita, que se verá en el capítulo 6, permite ver que cualquier curva dada por funciones implícitas suficientemente regulares puede escribirse como una curva paramétrica.

### 5.1 DEFINICIONES Y EJEMPLOS

#### Definición 1:

Llamaremos curva paramétrica a una función  $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $\text{o } \mathbb{R}^2$ ), donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo, y la función  $\rho(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in I$  es tal que las funciones coordenadas  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  son continuas.

Si  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  son derivables hasta orden  $n$ , diremos que la curva es diferenciable hasta orden  $n$ .

Al conjunto  $\{(x(t), y(t), z(t)) / t \in I\}$  recorrido de la función  $\rho(t)$  le llamamos traza de la curva.

#### Notas:

- En lo que sigue supondremos, salvo indicación en contrario, que la curva es diferenciable hasta el orden necesario en cada caso.

- Deben distinguirse en la definición dos cosas: la función  $\rho(t)$  y su recorrido  $\{\rho(t) / t \in I\}$ . Hemos adoptado, siguiendo a do Carmo [6], la convención de llamarle curva a la función  $\rho(t)$ , y no exclusivamente a su recorrido, que llamamos traza de la curva. Es decir, que una curva no está dada solamente por un conjunto de puntos del espacio sino además por una "forma de recorrer" esos puntos en función de un parámetro  $t$ .

Si pensamos en  $t$  como el tiempo (cosa habitual) en física una curva nos daría al movimiento de un punto en el espacio.

Otros autores denominan curva al recorrido de la función. La diferencia es exclusivamente de terminología, pero es importante distinguir ambas cosas.

Sobre todo, tener en cuenta que un mismo conjunto de puntos puede recorrerse de varias formas; en nuestro lenguaje, distintas curvas pueden tener la misma traza.

Los siguientes ejemplos aclararán más la situación.

#### Ejemplos

$$1) \rho(t) = (a \cos t, a \sin t), t \in \mathbb{R}$$

La traza de  $\rho(t)$  es la circunferencia de radio  $a$  y centro 0.

$$2) \rho(t) = (a \cos 2t, a \sin 2t), t \in \mathbb{R}$$

Aquí la traza es la misma que en 1), pero se recorre con mayor velocidad.

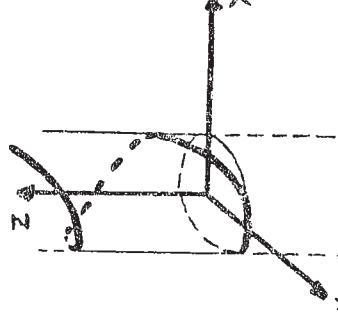
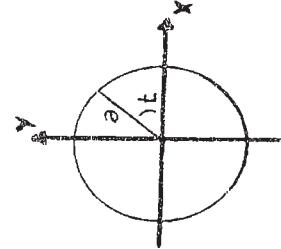
$$3) \rho(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), t \in \mathbb{R}$$

Para obtener una representación geométrica observemos que al variar  $t$ , las coordenadas  $x(t)$ ,  $y(t)$  describen la circunferencia de 1) y al mismo tiempo  $z(t)$  crece linealmente con  $t$ . La curva obtenida se llama hélice circular.

Los ejemplos 1) y 2) muestran dos parametrizaciones para la misma traza.

En general, si  $\rho(t)$  es una curva,  $t \in J$  y la componemos con una función  $t = \phi(u)$ , donde  $\phi: J \rightarrow I$  es continua e inyectiva, se obtiene otra curva  $Q(u) = \rho(\phi(u))$  con la misma traza.

Se dice que se ha efectuado una reparametrización de la curva  $\rho(t)$ .



El cambio de parámetro  $t = \varphi(u)$  establece una "nueva escala de tiempos" con que se recorren los puntos de la traza de  $P$ .

Si  $P(t)$  es diferenciable hasta orden  $n$ , para mantener estas condiciones en  $\Omega$  hará falta exigir derivadas a la función  $\varphi$ .

Un caso particular es  $t = -u$ , en el que se ha cambiado el sentido de recorrido.

#### DERIVADAS DE UNA CURVA: VELOCIDAD Y ACCELERACION

##### Definición 2:

Si  $P(t)$  es una curva diferenciable,  $\dot{P}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ , la derivada de  $P(t)$  es

$$\dot{P}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

dónde usaremos la notación  $x, y, z$  (introducida por Newton) para las derivadas de las funciones  $x(t), y(t), z(t)$ .

La derivada segunda se  $\ddot{P} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$  y así sucesivamente con las de orden mayor.

Veamos una interpretación para las derivadas.

Si  $P: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva y  $t_0$  tal que existe  $E(t_0, \delta) \subset I$



El vector  $P(t_0 + \Delta t) - P(t_0)$  nos da el desplazamiento en la curva en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ ; por lo tanto

$$\frac{P(t_0 + \Delta t) - P(t_0)}{\Delta t} = \left[ \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}, \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \right]$$

Puede interpretarse como el vector de desplazamiento / tiempo) en el intervalo  $[t_0, t_0 + \Delta t]$ .

##### Definición 3:

Si  $P(t_0) \neq 0$ , el vector  $\dot{P}(t_0)$  se llama vector tangente a la curva en el instante  $t_0$ .

De forma análoga, si existe

$$\ddot{P}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$$

se lo interpreta como la aceleración instantánea a( $t_0$ ).

$$\left[ \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \right] \text{ sería la aceleración media en } \Delta t$$

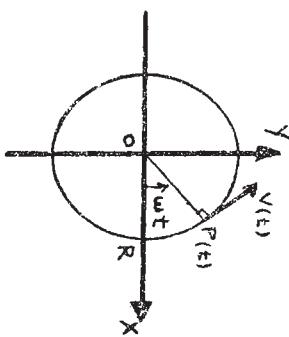
##### Ejemplos:

- 1) Movimiento circular uniforme sea  $P(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$

Se tiene, derivando:

$$v(t) = \dot{P}(t) = R \omega (-\sin \omega t, \cos \omega t)$$

$$a(t) = \ddot{P}(t) = -R \omega^2 (\cos \omega t, \sin \omega t)$$



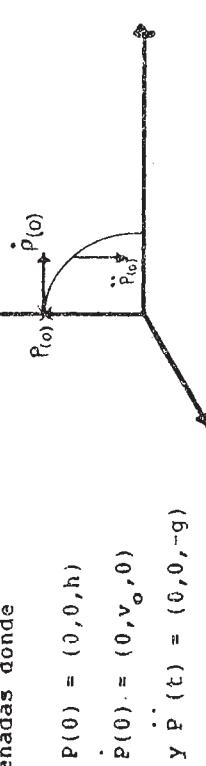
Se verifica que  $v(t)$  es perpendicular a  $P(t)$  (su producto escalar es 0) y que  $a(t) = -\omega^2 P(t)$ , de donde  $a(t)$  es un vector que apunta al origen de coordenadas (aceleración centrípeta).

Además  $|v(t)| = R\omega$ ,  $|a(t)| = R\omega^2 = \frac{|v(t)|^2}{R}$ , fórmulas que el lector recordará de cursos elementales de Física.

### 5) Caída libre

Se lanza un objeto desde una altura  $h$ , con velocidad inicial  $v_0$  (horizontal), sometido a la gravedad. Supondremos entonces que la aceleración del movimiento es constante, de dirección vertical y valor  $g$ .

Establecemos un sistema de coordenadas donde



$$P(0) = (0, v_0, 0)$$

$$\dot{P}(t) = (0, 0, -g)$$



Calculamos  $P(t)$ , integrando dos veces a partir de  $\dot{P}(t)$ .

$$\begin{aligned} P(t) &= (0, 0, -gt) \quad \Rightarrow \quad \dot{P}(t) = (0, 0, -gt) + \dot{P}(0) \\ \Rightarrow \dot{P}(t) &= (0, v_0, gt) \quad \Rightarrow \quad P(t) = (0, v_0 t, -\frac{gt^2}{2}) + P(0) \\ \Rightarrow P(t) &= (0, v_0 t, h - \frac{gt^2}{2}), \text{ movimiento de caída libre} \end{aligned}$$

En otras palabras,  $x(t) = 0$ ,  $y(t) = v_0 t$ ,  $z(t) = h - \frac{gt^2}{2}$

Eliminando  $t$  entre las expresiones de  $y$ ,  $z$  obtenemos:

$$z = h - \frac{g}{2v_0^2} y^2, \text{ ecuación implícita de la trayectoria } P(t) \text{ en el}$$

plano  $x = 0$ . Se trata de un parábola.

Recalcamos una vez más que las operaciones de derivación (o integración) en curvas se realiza coordenada a coordenada.

Como las curvas toman valores en  $\mathbb{R}^3$ , es posible realizar con ellas las operaciones entre vectores de  $\mathbb{R}^3$ : en particular, operaciones lineales y productos escalar y vectorial.

Sean  $P(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$

$$Q(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$

se tiene  $\lambda P + \mu Q = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$

$$\langle P, Q \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (\text{producto escalar})$$

$$P \wedge Q = \begin{vmatrix} 1 & j & k \\ x_1 & Y_1 & Z_1 \\ x_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1, Z_1 X_2 - Z_2 X_1, X_1 Y_2 - X_2 Y_1)$$

(producto vectorial). Aquí,  $1, j, k$  denotan los versores coordinados  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ .

Referimos al curso de Álgebra Lineal para las propiedades de estas operaciones. Una propiedad adicional es la regla de derivación:

$$\begin{aligned} \text{Proposición 1:} \\ 1) \lambda \overline{P + Q} &= \lambda \overline{P} + \mu \overline{Q} \\ 2) \overline{\overline{P} + Q} &= \overline{P} + Q + P \wedge Q \\ 3) \overline{P \wedge Q} &= P \wedge Q + P \wedge Q \end{aligned}$$

Demostramos 2). El resto queda como ejercicio.

$$\begin{aligned} \overline{P + Q} &= \overline{x_1 x_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2} = \overline{x_1} \overline{x_2} + \overline{Y_1} \overline{Y_2} + \overline{Z_1} \overline{Z_2} \\ &+ \overline{Y_1} \overline{Y_2} + \overline{Z_1} \overline{Z_2} + \overline{x_1} \overline{Z_2} = \overline{x_1} \overline{x_2} + \overline{Y_1} \overline{Y_2} + \overline{Z_1} \overline{Z_2} \\ &+ \overline{Y_1} \overline{Y_2} + \overline{Z_1} \overline{Z_2} = P \wedge Q + P \wedge Q \end{aligned}$$

Q.E.D.

Nos restringiremos a continuación a curvas cuya velocidad no se anula nunca:

Definición 4:

$$\text{Ejemplo 7: } \mathbf{P}(t) = (x(t), y(t)) \quad x(t) = \frac{2t - 1}{t^2 - 1} \quad y(t) = \frac{t^2}{t-1}$$

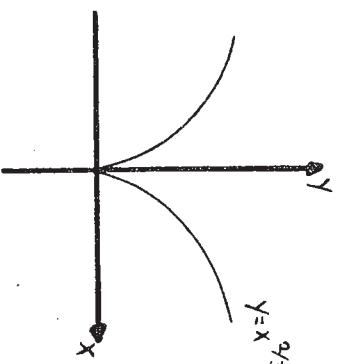
$\mathbf{P}(t)$ , curva diferenciable, se dice regular si  $\dot{\mathbf{P}}(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in I$ .

Ejemplo:

$$6) \quad \mathbf{P}(t) = (t^3, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hacemos una representación gráfica de la traza de  $\mathbf{P}(t)$

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$



Escribimos  $t = x^{1/3} \Rightarrow y = x^{2/3}$ .

Observemos que  $\mathbf{P}(t)$  no es regular:  $\dot{\mathbf{P}}(t) = (3t^2, 2t)$  se anula en  $t = 0$ .

La velocidad  $\dot{\mathbf{P}}(t)$  se anula justamente en el punto en que la traza no es "suave".

Esto nos da una idea del papel que juega la hipótesis de regularidad, cuando ésta se verifica: el hecho de que  $\dot{\mathbf{P}}(t) \neq 0$  nos garantiza que existe vector tangente en cada punto y esto nos da garantías de "suavidad" en la traza.

## 5.2 REPRESENTACION GRAFICA DE CURVAS PLANAS

A continuación describimos herramientas que pueden servir para obtener una representación gráfica de una curva  $\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t))$  en el plano.

Lo haremos basándonos en el siguiente ejemplo.

$t$	$x$	$y$
$-\infty$	0	+
-	-	+
0	$\infty$	0
$+ \infty$	-	$\infty$

- 1) Una primera observación es que, por definición, una curva  $\mathbf{P}(t)$  está definida en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , y aquí  $\mathbf{P}(t)$  está definida en  $t \neq -1$ . La expresión anterior define entonces, en rigor, 3 curvas en los intervalos  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  y  $(1, +\infty)$ . Las estudiaremos, sin embargo, simultáneamente.
- 2) Estudio de crecimiento. Para obtener un bosquejo, se estudia el crecimiento de  $x(t)$ ,  $y(t)$  a partir de sus derivadas (verificar)
- $$x(t) = \frac{-2(t^2 - t + 1)}{(t^2 - 1)^2}, \quad y(t) = \frac{t^2 - 2t}{(t - 1)^2}$$

Estudiamos el signo de  $x$ ,  $y$ , y a partir de ahí el crecimiento de  $x$ ,  $y$ , con el siguiente cuadro:

$$x(t) = \frac{-2(t^2 - t + 1)}{(t^2 - 1)^2} \quad y(t) = \frac{t^2 - 2t}{(t - 1)^2}$$

En  $t$  se destacaron los puntos más relevantes. En los puntos de discontinuidad  $t = \pm 1$  (que separan las distintas "ramas" de la curva) se estudian los límites laterales.

3) En los puntos en que  $x = 0$  y tienen límite infinito, se puede estudiar la existencia de rectas asintotas:

- En  $t \rightarrow -\infty$ , se tiene  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow +\infty$ , por lo que la asintota es el eje  $Oy$ . Idem para  $t \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} (y(t) - (m \cdot x(t) + n)) = 0$$

- En  $t \rightarrow 1^+$ , se tiene  $x$ ,  $y \rightarrow +\infty$ . Para investigar la existencia de asintotas se busca  $m$ ,  $n$  tales que

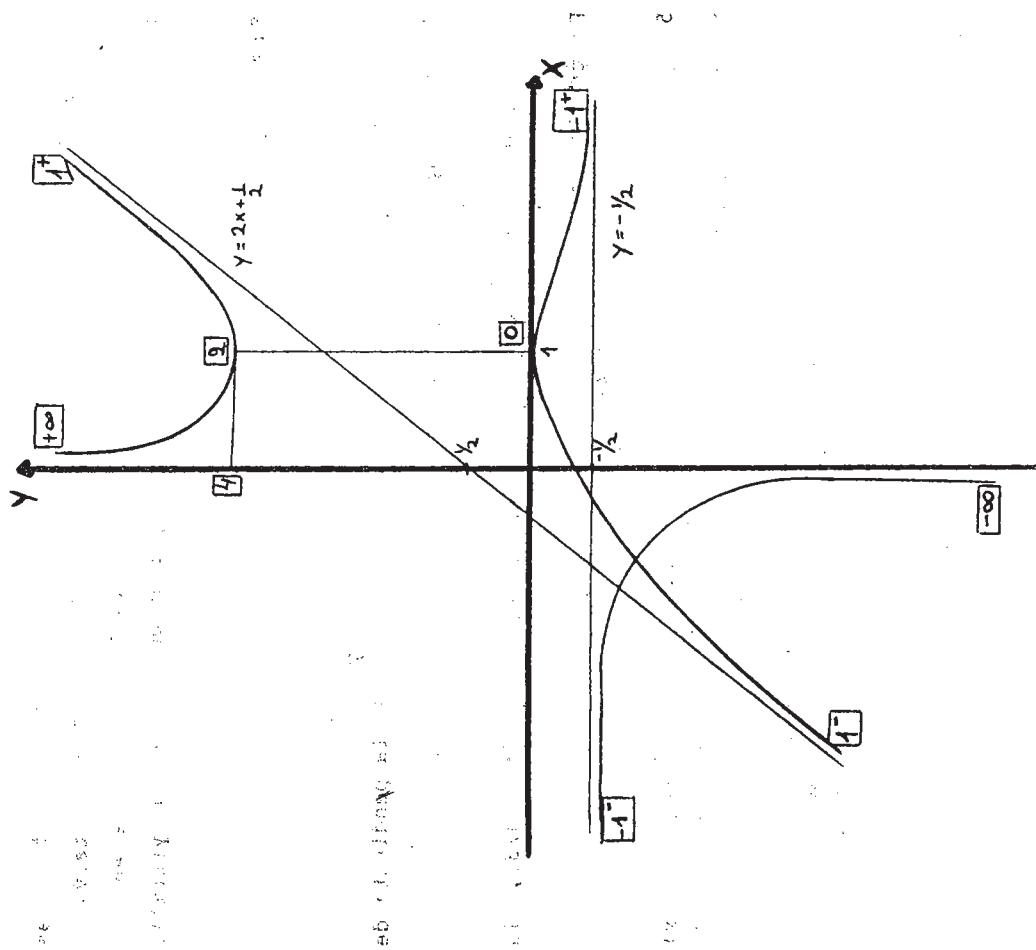
$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{y(t)}{x} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t^2}{(2t-1)} = 2$$

Determinamos  $m$  calculando

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[ \frac{\frac{t^2}{t-1}}{\frac{(2t-1)}{t+1}} - \frac{2(2t-1)}{(t-1)(t+1)} \right] =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[ \frac{t^3 + t^2 - 4t + 2}{(t-1)(t+1)} \right] = \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[ \frac{t^2 + 2t - 2}{t+1} \right] = \frac{1}{2}$$

- asintota para  $t \rightarrow 1^+$ , es la recta  $y = 2x + \frac{1}{2}$ .



Se representa la traza de  $P(t)$ ; los valores indicados en un círculo corresponden al parámetro  $t$ .

Como complementos al estudio anterior tenemos:

- 4) Si en un intervalo de  $t$ , se tiene  $x \neq 0$ , entonces (teoremas 15/16, cap. 3) existe una función inversa  $t(x)$  en ese intervalo. Componiendo con  $y(t)$ , tenemos que la traza de la curva en ese intervalo está representada por  $y(x)$ , función compuesta  $y(t(x))$ .

Su derivada es  $y'(x) = y(t(x)) t'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Por lo tanto en cada punto con  $x \neq 0$ ,  $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$  da la pendiente de la recta tangente en el punto.

En el ejemplo, para  $t = -2$ ,  $(x, y) = (-5/3, -4/3)$ , la

$$\text{pendiente es } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{8/9}{-14/9} = -\frac{4}{7}.$$

5) Si se quiere estudiar la concavidad de la función  $y(x)$  resultante (para un intervalo de  $x \neq 0$ ), se tiene

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \rightarrow \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{y} \dot{x} - \dot{y} \ddot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{1}{\dot{x}}$$

$$y'' = \frac{\ddot{y} \dot{x} - \dot{y} \ddot{x}}{\dot{x}^2}$$

se deja el estudio de la concavidad como ejercicio.

- 6) Puntos múltiples. Puede interesar determinar los puntos por los que la curva "pasa" dos veces, es decir puntos  $P(t_1) = P(t_2)$  con  $t_1 \neq t_2$ .

Imponemos

$$\frac{2t_1 - 1}{t_1^2 - 1} = \frac{2t_2 - 1}{t_2^2 - 1}, \text{ lo que equivale a}$$

$$\frac{t_1^2}{t_1 - 1} = \frac{t_2^2}{t_2 - 1}$$

$$\begin{cases} 2t_1 t_2^2 - 2t_1^2 t_2 - t_2^2 + t_1^2 + 2t_2 - 2t_1 = 0 \\ t_1^2 t_2 - t_1 t_2^2 - t_1^2 + t_2^2 = 0 \end{cases}$$

Como  $t_1 = t_2$  es siempre solución, las ecuaciones anteriores tienen  $(t_1 - t_2)$  como factor común, que eliminaremos ( $t_1 \neq t_2$ ):

$$\begin{cases} (t_1 + t_2) - 2t_1 t_2 = 2 & \Rightarrow \begin{cases} s - 2p = 2 & \text{con } s = t_1 + t_2 \\ (t_1 + t_2) - t_1 t_2 = 0 & p = t_1 t_2 \end{cases} \\ s - p = 0 & \end{cases}$$

Deducimos  $s = p = -2$ , de donde  $t_1, t_2$  cumplen:

$$t^2 + 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow t_1 = -1 + \sqrt{3}, t_2 = -1 - \sqrt{3}, P(t_1) = P(t_2) = (-1, -2)$$

(verificar).

En este caso se trata de puntos de diferentes ramas (diferentes curvas, en rigor); se pueden dar ejemplos de puntos múltiples en la misma curva.

## 5.3 LONGITUD DE ARCO

Definición 1:

Sea  $P: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular.  $t_0, t_f \in I$ .

Llamamos longitud del arco de curva entre los puntos  $P(t_0)$ ,  $P(t_f)$ , al número

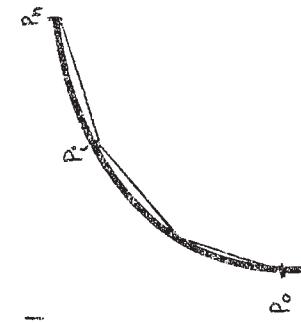
$$l = \int_{t_0}^{t_f} |P'(t)| dt$$

Para justificar la definición adoptada, veremos que  $l$  es el límite de la longitud de una poligonal formada por puntos  $P_i$  de  $P(t_i)$  obtenidos a partir de una partición del intervalo  $[t_0, t_f]$ .

## Teorema 2

Sea  $P: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  curva regular,  $P(t)$  continua,  $t_0, t_f \in I$ . Para una partición  $Q = \{t_0, \dots, t_n\}$  de intervalo  $[t_0, t_f]$ ,

$$\text{definimos } l_Q = \sum_{i=0}^{n-1} |P(t_{i+1}) - P(t_i)|$$



$$\Rightarrow \lim_{|Q| \rightarrow 0} l_Q = \int_{t_0}^{t_f} |P'(t)| dt$$

Demostración:

Suponemos conocida la desigualdad triangular para vectores de  $\mathbb{R}^3$  (ver curso de Álgebra Lineal):  $|u + w| \leq |u| + |w|$ .

Tomando  $u = v'$ ,  $w = v - v'$ , se tiene

$$|v| \leq |v'| + |v - v'| \Rightarrow |v| - |v'| \leq |v - v'|$$

$$P(t_{i+1}) - P(t_i) = (x(t_{i+1}), y(t_{i+1}), z(t_{i+1})), \text{ con } \Delta t = t_{i+1} - t_i,$$

$$t_i^2, t_i^3 \in (t_i, t_{i+1}) \Rightarrow l_Q = \sum_{i=0}^{n-1} |(x(t_i^2), y(t_i^2), z(t_i^3))| \Delta t_i.$$

Si consideramos una suma de Riemann de la función  $|P(t)|$ , con partición  $Q$  y puntos  $T_Q = \{t_0, \dots, t_{n-1}\}$

$$SR(|P|, Q, T_Q) = \sum_{i=0}^{n-1} |(x(t_i^4), y(t_i^4), z(t_i^3))| \Delta t_i$$

veremos que difiere muy ligeramente de  $l_Q$ . Probaremos a continuación

que  $l_Q - SR(|P|, Q, T_Q) \xrightarrow[|Q| \rightarrow 0]{} 0$ , con lo que quedará probado el

teorema, ya que las sumas de Riemann convergen a la integral.

Para ello, intercalaremos el siguiente lema:

$$\begin{aligned} \text{Lema 3: } & v = (x, y, z) \Rightarrow ||v| - |v'|| \leq |x - x'| + |y - y'| + |z - z'| \\ & v' = (x', y', z') \end{aligned}$$

Demostración:

Análogamente,  $\|\mathbf{v}'\| - \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}' - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|$ , de donde

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}'\| - \|\mathbf{v}\| &\leq \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{y} - \mathbf{y}', \mathbf{z} - \mathbf{z}')\| = \\ &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}', 0, 0) + (0, \mathbf{y} - \mathbf{y}', 0) + (0, 0, \mathbf{z} - \mathbf{z}')\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{z}'\| \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la igualdad triangular.

Q.E.D. (del lema)

Volviendo al teorema, con

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= (\dot{\mathbf{x}}(t_i^1), \dot{\mathbf{y}}(t_i^2), \dot{\mathbf{z}}(t_i^3)) \\ \mathbf{v}'_i &= (\dot{\mathbf{x}}(t_i^1), \dot{\mathbf{y}}(t_i^1), \dot{\mathbf{z}}(t_i^1)) \end{aligned}$$

se obtiene del lema:

$$\|\mathbf{v}_i\| - \|\mathbf{v}'_i\| \leq \|\dot{\mathbf{y}}(t_i^2) - \dot{\mathbf{y}}(t_i^1)\| + \|\dot{\mathbf{z}}(t_i^3) - \dot{\mathbf{z}}(t_i^1)\|$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{l}_a - \text{SR}(\|\mathbf{P}\|, Q, T_a)\| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|(\dot{\mathbf{x}}(t_i^1), \dot{\mathbf{y}}(t_i^2), \dot{\mathbf{z}}(t_i^3))\| \Delta t_i \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (\|\dot{\mathbf{y}}(t_i^2) - \dot{\mathbf{y}}(t_i^1)\| + \|\dot{\mathbf{z}}(t_i^3) - \dot{\mathbf{z}}(t_i^1)\|) \Delta t_i \end{aligned}$$

Como  $\dot{\mathbf{y}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{z}}(t)$  son uniformemente continuas en  $(t_o, t_f]$ , puedo obtener  $\delta$  tal que si  $|Q| < \delta$ ,

$$\|\dot{\mathbf{y}}(t_i^2) - \dot{\mathbf{y}}(t_i^1)\| \leq \frac{\epsilon}{2(t_f - t_o)}$$

$$\|\dot{\mathbf{z}}(t_i^3) - \dot{\mathbf{z}}(t_i^1)\| \leq \frac{\epsilon}{2(t_f - t_o)}$$

$$\|\mathbf{l}_a - \text{SR}(\|\mathbf{P}\|, Q, T_a)\| < \epsilon \quad \text{para } |Q| \leq \delta$$

Q.E.D. (Teo. 2)

Ejemplo:

8) Longitud de la circunferencia

$$\text{Sea } \mathbf{P}(t) = (R \cos t, R \sin t), t \in [-\pi, \pi].$$

$$\mathbf{P}(t) = R(-\sin t, \cos t) \Rightarrow \|\dot{\mathbf{P}}\| = R$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA  
FACULTAD DE INGENIERIA

DEPARTAMENTO DE  
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA  
MONTEVIDEO - URUGUAY

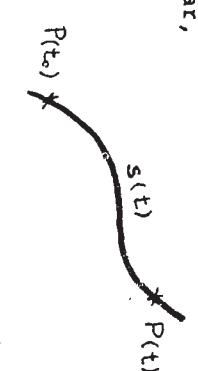
Nota: La fórmula  $l = \int_t_0^t \|\dot{\mathbf{P}}(t)\| dt$ , se mantiene válida en algunos casos de curvas no regulares, como por ejemplo curvas en las que  $\dot{\mathbf{P}}$ , no existe o vale 0 en un conjunto finito de puntos. No entraremos en ello.

#### REPARAMETRIZACION RESPECTO A LA LONGITUD DEL ARCO

Sea  $\mathbf{P}(t)$  una curva regular,

$t_o$  es fijo, consideramos

$$s(t) = \int_{t_o}^t \|\dot{\mathbf{P}}(\tau)\| d\tau$$



$s(t)$  nos da la longitud del arco recorrido entre los tiempos  $t_o$  y  $t$ .

$s(t)$  es una función continua,  $s'(t) = \|\dot{\mathbf{P}}(t)\|$  es continua y positiva.

Estamos entonces en las hipótesis del teorema de existencia de la función inversa (Teorema 16, Cap. 3):

Existe una función inversa  $t(s)$ , diferenciable, con

$$\dot{t}'(s) = \frac{dt}{ds} = -\frac{1}{s} = -\frac{1}{|\dot{p}|}$$

Esto nos lleva a considerar la reparametrización  $\alpha(s) = p(t(s))$ , donde el nuevo parámetro es la longitud del arco desde el punto  $p(t_0)$ . Aplicando la regla de la cadena coordenada a

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \dot{p}(t)\dot{t}'(s) = -\frac{\dot{p}}{s}, \text{ de donde } |\alpha'(s)| = 1, \forall s.$$

Parametrizar la traza de una curva respecto a la longitud del arco equivale entonces, a recorrerla con velocidad de módulo 1.

Comentamos que la parametrización respecto a la longitud del arco no es única. Por un lado, el punto  $p(t_0)$  es arbitrario; cambiándolo, se obtiene otra parametrización respecto a la longitud de arco por un cambio de sentido  $s' = -s$ .

Ejemplo:

9) Consideremos la hélice

$$p(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \text{ del ejemplo 3)}$$

$$\begin{aligned} \text{Se obtiene } \dot{p} &= (-a \sin t, a \cos t, b) \rightarrow |\dot{p}| = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}. \text{ Con } t_0 = 0, \text{ se obtiene} \end{aligned}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

$$\rightarrow t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La representación respecto a la longitud de arco es

$$\alpha(s) = \left[ a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \quad s \in \mathbb{R}$$

#### 5.4 TEORÍA LOCAL DE CURVAS

En esta sección se abordará el estudio de las curvas desde un punto de vista geométrico. Se buscará definir parámetros locales (en un punto dado) que describan propiedades geométricas de las curvas.

Para que la estructura geométrica aparezca en forma "pura" es conveniente trabajar en curvas parametrizadas respecto a la longitud del arco  $s$ . De este modo nos movemos "con velocidad 1" y nos independizamos de propiedades "cinemáticas" que dependen de la velocidad con que recorren los puntos.

Trabajamos entonces, en casi toda la sección, con curvas  $\alpha(s)$  parametrizadas respecto a la longitud de arco, es decir con  $|\alpha'(s)| \equiv 1$ . Al final de la sección se retornará al caso general.

El siguiente lema será usado en toda la sección.

Lema 4:

$\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  función diferenciable tal que  $|\beta(s)| = \text{cte}$  para todo  $s \in I$ . Entonces  $\beta'(s) \perp \beta(s), \forall s \in I$ .

Demostración:

$|\beta(s)| = C \Rightarrow \beta(s) \cdot \beta(s) = C^2$  (producto escalar).

Derivamos y aplicamos la proposición 1:

$$\beta'(s) \cdot \beta(s) + \beta(s) \cdot \beta'(s) = 0 \Rightarrow \beta'(s) \cdot \beta(s) = 0$$

Q.E.D.

**Definición 6:**  $\alpha(s)$  curva parametrizada respecto a la longitud de arco. El versonor  $t(s) = \alpha'(s)$  se llama versonor tangente a la curva. El número  $k(s) = t(s) \cdot t'(s)$

$|k(s)|$  se llama curvatura de  $\alpha$  en  $s$ .  
Observar que  $|t(s)| = |\alpha'(s)| = 1$ , ( $t$  es un versonor, vector de módulo 1).

Para motivar la denominación de "curvatura" para  $|\alpha''(s)| = k(s)$ , veremos que  $k(s)$  nos da una idea de la rapidez con que la curva cambia su dirección.

Para eso, sean  $s_0, s \in I$  y  $\varphi(s)$  el ángulo que forman  $t(s)$  y  $t(s_0)$ .

Como  $|t(s)| = |t(s_0)| = 1$ , se tiene, (ver figura) que

$$\|\varphi(s) - \varphi(s_0)\| = 2 \operatorname{sen} \left[ \frac{\varphi(s)}{s} \right]$$

Cuando  $s \rightarrow s_0$ ,  $\varphi(s) \rightarrow 0$  y  $|\varphi(s) - \varphi(s_0)| \sim \varphi(s) = \rho(s) = \rho(s_0)$ . Por lo tanto,

$$|\alpha''(s_0)| = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{|\alpha(s) - \alpha(s_0)|}{s - s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\rho(s) - \rho(s_0)}{s - s_0} = \rho'(s)$$

O sea que  $k(s_0) = \rho'(s_0)$  mide la rapidez con que cambia el ángulo de la tangente en el punto  $s_0$ .

En una recta,  $\rho(s)$  es siempre 0 y por lo tanto la curvatura es 0 para todo  $s$ . Como veremos a continuación, la recta es la única curva que cumple esto.

**Teorema 5:**

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $|\alpha'(s)| \neq 1$ ,  $\kappa(s) = |\alpha''(s)|$ .

Entonces,  $k(s) \equiv 0$  en  $I \iff \alpha(I)$  contenido en una recta.

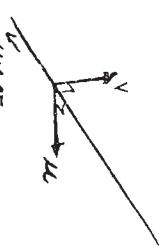
Demostración:

( $\Rightarrow$ )  $\alpha''(s) \equiv 0$  en  $I$ . Integrando, se tiene  $\alpha'(s) \equiv \text{cte} = v$  en  $I$ ,  $\alpha(s) = v s + u$ ,  $v, u$  constantes.

Las ecuaciones  $\alpha(s) = v s + u$ ,  $s \in \mathbb{R}$  definen una recta en el espacio, como se señaló en 5.0.

( $\Leftarrow$ ) Si  $\alpha(I)$  está contenido en una recta, puedo elegir dos versores  $u, v$  perpendiculares a la recta y entre sí.  
Se cumple

$$\begin{aligned} (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot u &= 0 \\ (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot v &= 0, \forall s \in I \end{aligned}$$



Derivando, deducimos que  $\alpha'(s) \cdot u = 0$ ,  $\alpha'(s) \cdot v = 0$  ( $\alpha'(s) \perp u$ ,  $\alpha'(s) \perp v$ ). Por lo tanto  $\alpha'(s)$  es colineal con  $u \wedge v$ :  $\alpha'(s) = \lambda(s)$ , ( $u \wedge v$ ),  $\lambda(s) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |\alpha'(s)| = |\lambda(s)| = 1 \Rightarrow \lambda(s) = \pm 1, \forall s \in I$ .  
Como  $\lambda(s)$  es continua, solo toma uno de los dos signos y es entonces constante  $\Rightarrow \lambda'(s) = 0, \forall s \in I$

$$\Rightarrow \alpha''(s) = \lambda'(s) (u \wedge v) = 0, \forall s \in I.$$

Q.E.D.

Ejemplo:

10) Sea  $P(t) = (R \cos t, R \sin t)$  la circunferencia. La reparametrización respecto a la longitud de arco nos da (verificar)  $\alpha(s) = (R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R})$ .

$$\rightarrow \alpha''(s) = -\frac{1}{R} (\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}) \rightarrow \boxed{k(s) = \frac{1}{R}}$$

El ejemplo concuerda con lo señalado más arriba sobre la interpretación de la curvatura: cuanto mayor es el radio de la CfA., más lentamente se "dobla" y menor es la curvatura.

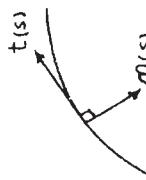
Esto nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 1:**  
 $\alpha(s)$  parametrizada respecto a la longitud del arco,  $k(s) \neq 0$ . El número  $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$  se llama radio de curvatura de  $\alpha$  en  $s$ .

**Definición 2:**  
 $\alpha(s)$  parametrizada respecto a la longitud de arco,  $k(s) \neq 0$ . El vector  $n(s) = \frac{\alpha'(s)}{| \alpha'(s) |}$  se llama vector normal a la curva.

**Observación:**

Como  $t(s) = \alpha'(s)$  tiene módulo constante, del lema 4 obtenemos que  $\alpha' \perp \alpha'' \Rightarrow t(s) \perp n(s)$ .  
 El vector  $n(s)$  es perpendicular a  $t(s)$ , vector tangente a la curva y por lo tanto es razonable el nombre adoptado.



**Ejercicio:** Hallar  $n(s)$  para la circunferencia (ejemplo 10).

**Definiciones 3:**

$$\alpha(s) / |\alpha'(s)| \equiv 1, k(s) \neq 0.$$

Al plano que pasa por  $\alpha(s)$ , determinado por los vectores  $t, n$  se le llama plano osculador.

Al punto  $Q = \alpha(s) + \rho(s)n(s)$  se le llama centro de curvatura de  $\alpha$  en  $s$ .

A la circunferencia contenida en el plano osculador, de centro  $Q$  y radio  $\rho(s)$  se le llama circunferencia osculatriz.

**Notas:**

- La curva  $\alpha(s)$  no está, en general, contenida en un plano (pensar por ejemplo en la hélice). El plano osculador es, sin embargo, el que "está más cerca" de la curva en un entorno de  $\alpha(s)$ . No daremos aquí una versión precisa de esta afirmación.

- Por otra parte, la circunferencia osculatriz es la CfA. que mejor aproxima a la curva en un entorno de  $\alpha(s)$ , hecho que tampoco probamos, Referencia: [6].

En adelante nos restringimos a curvas con curvatura  $k(s) \neq 0$ . Tenemos definido aquí el vector  $n(s)$  y es natural completar con un tercer vector para tener una terna ortonormal:

**Definición 10:**

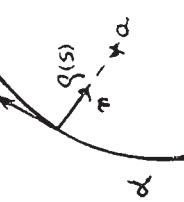
$$(k(s) \neq 0)$$

El vector  $b(s) = t(s) \wedge n(s)$  se llama vector binormal.

La terna  $(t, n, b)$  se llama

triédro de Frenet de la curva en  $s$ .

El plano por  $\alpha(s)$  con vectores  $t, b$  se llama plano rectificante.  
 El plano por  $\alpha(s)$  con vectores  $t, n$  se llama plano normal a la curva.



**Proposición 6:**

$$\alpha(s) / |\alpha'(s)| \equiv 1, k(s) \neq 0.$$

El vector  $b'(s)$  es colineal con  $n(s)$ .

Demostración:

Como  $|b(s)| = 1$ , constante, del lema 4 tenemos que  $b' \perp b$ .  
Por otra parte, derivando la expresión  $b = t \wedge n^A$ , tenemos:

$$b' = t' \wedge n + t \wedge n' = k.n \wedge n + t \wedge n' = t \wedge n'.$$

de donde  $b' \perp t$ . Por lo tanto  $b'$  es colineal con  $n$ .

Q.E.D.

$$\rightarrow t(s) \perp u, n(s) \perp u \quad \forall s \in I$$

$$\rightarrow b(s) \text{ es colineal con } u \quad \forall s \in I \rightarrow b(s) = \pm u, \quad \forall s \in I$$

Como  $b(s)$  es continua,  $b(s)$  es constante y  $b'(s) \equiv 0$

Q.E.D.

Definición 11:  
Al escalar  $\tau(s)$  tal que  $b'(s) = -\tau(s) n(s)$  le llamaremos torsión de  $\alpha$  en  $s$ .

Observar que la variación de  $b$  con  $s$  corresponde a la variación del plano osculador (perpendicular a  $b$ ). Por lo tanto  $\tau(s)$  mide con qué rapidez la curva "se sale" de un plano. Para reforzar esta interpretación, tenemos la siguiente:

**Teorema 7:**

Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3 / |\alpha'(s)| \equiv 1, k(s) \neq 0$ . Entonces,

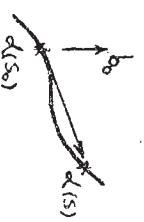
$$\tau(s) \equiv 0 \text{ en } I \iff \alpha(I) \text{ contenido en un plano.}$$

Demostración:

$$( \rightarrow ) \quad \tau(s) \equiv 0 \Rightarrow b'(s) \equiv 0 \Rightarrow b(s) = b_0 \text{ constante.}$$

$$\text{Consideramos } (\alpha(s).b_0)' = \alpha'(s) \cdot b_0 = t \cdot b_0 = 0.$$

$$\text{Entonces } \alpha(s) \cdot b_0 = C \text{ (constante)}$$



$$\rightarrow (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot b_0 = 0 \quad \forall s \in I$$

$\rightarrow \alpha(s)$  pertenece al plano perpendicular a  $b_0$  por  $\alpha(s_0)$  para todo  $s \in I$

( $\leftarrow$ )

Si  $\alpha(s)$  pertenece a un plano  $\pi$ , para todo  $s$ , sea  $u$  un versor perpendicular a  $\pi$ . Entonces  $\alpha(s) - \alpha(s_0) \perp u$  para todo  $s$ .  $\Rightarrow (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot u = 0, \forall s \in I$ .

$$\text{Derivando, tenemos } t(s) \cdot u = 0,$$

$$k(s) n(s) \cdot u = 0 \quad \forall s \in I$$

Q.E.D.

$$\rightarrow b(s) \text{ es colineal con } u \quad \forall s \in I \rightarrow b(s) = \pm u, \quad \forall s \in I$$

Como  $b(s)$  es continua,  $b(s)$  es constante y  $b'(s) \equiv 0$

Q.E.D.

**FORMULAS DE FRENET**

las siguientes fórmulas nos dan las derivadas de los versores

del triángulo de Frenet:

Notas: La torsión, a diferencia de la curvatura, es una magnitud con signo. Existe una interpretación de ese signo en términos de la orientación en el espacio que define la curva, tema en el que no entraremos. Algunos autores definen  $\tau$  con el signo opuesto ( $b' = \tau n$ ).

Las siguientes fórmulas nos dan las derivadas de los versores del triángulo de Frenet:

$$\begin{aligned} & \boxed{t' = k n} \\ & \begin{cases} n' = -k t + \tau b & \text{o también} \\ b' = -\tau n & \text{(notación)} \end{cases} \end{aligned}$$

La primera es la definición de  $n$  ( $t' = \alpha''$ ). La última es la definición de  $\tau$ . Veámos la segunda.

Para ello derivaremos la expresión

$$n = b \wedge t$$

Se obtiene:

$$n' = b' \wedge t + b \wedge t' = -\tau (n \wedge t) + k (b \wedge n) = \tau b - k t$$

#### FORMULA EXPLICITA PARA LA TORSION

$$\boxed{\tau(s) = \frac{(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{k(s)^2} \quad (u, v, w) = (u \wedge v) \cdot w}$$

(prod. mixto)

Para probarlo, usamos la 2da. fórmula de Frenet:

$$\begin{aligned} \tau(s) &= b \cdot n' = (t \wedge n) \cdot \left[ \frac{\alpha'''}{k} \right] = \left[ \alpha' \wedge \frac{\alpha''}{k} \right] \cdot \left[ \frac{\alpha'''}{k} \right] + \\ &+ \alpha'' \cdot \left[ \frac{[-k']}{k^2} \right] = \left[ \alpha' \wedge \frac{\alpha''}{k} \right] \cdot \frac{\alpha'''}{k} - \left[ \alpha' \wedge \frac{\alpha''}{k} \right] \cdot \alpha'' \left[ \frac{-k'}{k^2} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{k(s)^2} ; \text{ pues } \left[ \alpha' \wedge \frac{\alpha''}{k} \right] \cdot \alpha'' \left[ \frac{-k'}{k^2} \right] = 0$$

Ejemplo

$$11) \quad \alpha(s) = \left[ a \cos \left( \frac{s}{c} \right), a \sin \left( \frac{s}{c} \right), b \frac{s}{c} \right] (\text{hélice})$$

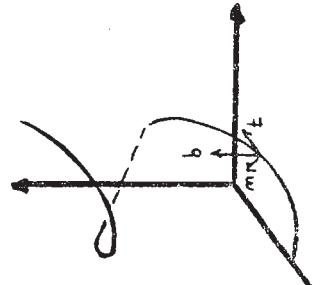
$$\text{con } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$t(s) = \alpha'(s) = \left[ -\frac{a}{c} \sin \left( \frac{s}{c} \right), \frac{a}{c} \cos \left( \frac{s}{c} \right), b \right]$$

$$\alpha''(s) = -\frac{a}{c^2} \left[ \cos \left( \frac{s}{c} \right), \sin \left( \frac{s}{c} \right), 0 \right]$$

$$\rightarrow k(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

$$n(s) = - \left( \cos \left( \frac{s}{c} \right), \sin \left( \frac{s}{c} \right), 0 \right) \quad (\text{observar que es horizontal})$$



$$\begin{aligned} b(s) &= t \wedge n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{c} \sin \left( \frac{s}{c} \right) & \frac{a}{c} \cos \left( \frac{s}{c} \right) & 0 \\ -\cos \left( \frac{s}{c} \right) & -\sin \left( \frac{s}{c} \right) & 0 \end{vmatrix} = \frac{-b}{c} \\ &= \left[ \frac{b}{c} \sin \left( \frac{s}{c} \right), -\frac{b}{c} \cos \left( \frac{s}{c} \right), \frac{a}{c} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b'(s) &= \left[ \frac{b}{c^2} \cos \left( \frac{s}{c} \right), \frac{b}{c^2} \sin \left( \frac{s}{c} \right), 0 \right] = -\frac{b}{c^2} n(s) \\ &\rightarrow \tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Verificar este resultado con la fórmula explícita.

En el caso de la hélice, la curvatura y la torsión son constantes (iguales en todos los puntos).

#### DEPENDENCIA CON LOS CAMBIOS DE ORIENTACION

Todas las características locales definidas ( $t, n, b, k, \tau$ ) no dependen del origen que se tome para las longitudes de arco: si se realiza una reparametrización  $\beta(s) = \alpha(s - s_0)$ , es fácil ver que en un punto dado, los valores de  $t, n, b, k$  y  $\tau$  con la nueva parametrización coinciden.

Sin embargo, si se cambia el sentido,  $\beta(s) = \alpha(-s)$ , tenemos lo siguiente:

$$\beta'(-s) = -\alpha'(-s); \quad \beta''(-s) = \alpha''(-s); \quad \beta'''(-s) = \alpha'''(-s)$$

Deducimos que el vector  $t$  cambia de sentido, mientras que la curvatura  $k$  y el vector  $n$  no varían. Verificar como ejercicio que  $b$  cambia de sentido y  $\tau$  no varía.

Los parámetros locales introducidos hasta aquí dependen de la derivadas hasta orden 3 de  $\alpha(s)$  (Hemos supuesto implícitamente que estas derivadas existen). Se podría pensar en continuar derivando y obtener nuevos parámetros. Sin embargo, el siguiente teorema nos dice que esto no es necesario: una curva en  $\mathbb{R}^3$  queda totalmente determinada por las funciones  $k(s)$ ,  $\tau(s)$  a menos de un cambio de coordenadas rígido.

**Teorema 8** (Teorema fundamental de la teoría local de curvas)

Dadas funciones  $k(s) > 0$ ,  $\tau(s)$ ,  $s \in I$ , (\*), existe una curva regular  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $s$  es la longitud de arco,  $k(s)$  es su curvatura y  $\tau(s)$  su torsión.

Además,  $\alpha$  es única a menos de un movimiento rígido.

(\*) Se exigen además hipótesis de regularidad en  $k(s)$ ,  $\tau(s)$ .

Demostración:

la omitimos. Referencia [6] (recurre a herramientas de ecuaciones diferenciales).

#### CASO EN EL QUE EL PARAMETRO NO ES LA LONGITUD DEL ARCO

Para una curva  $\rho(t)$  cualquiera, el camino para hallar  $t$ ,  $b$ ,  $n$ ,  $k$ ,  $\tau$ , sería reparametrizar respecto a la longitud del arco y luego aplicar las fórmulas anteriores. Es más cómodo, si embargo, tener fórmulas explícitas, que presentamos a continuación.

donde

$$k = \frac{\dot{\rho} \wedge \ddot{\rho}}{|\dot{\rho}|^3}$$

Deducimos que  $b = \frac{\dot{\rho} \wedge \ddot{\rho}}{|\dot{\rho} \wedge \ddot{\rho}|}$  y que  $|\dot{\rho} \wedge \ddot{\rho}| = k |\dot{\rho}|^2$ , de

$$\rightarrow \dot{\rho} \wedge \ddot{\rho} = k |\dot{\rho}|^2 (t \wedge n) = k |\dot{\rho}|^2 b.$$

$$t = \frac{\dot{\rho}}{|\dot{\rho}|}$$

La deducción de estas fórmulas es sencilla considerando  $\rho(t) = \alpha(s(t))$ , donde  $s$  es la longitud del arco ( $s(t) = |\dot{\rho}(t)|$ ) y derivando por la regla de la cadena.

$$\text{En primer lugar, } \dot{\rho} = \underline{\alpha'} \cdot s = \underline{t} \cdot \dot{\rho} \rightarrow$$

$$t = \frac{\dot{\rho}}{|\dot{\rho}|}$$

$$k = \frac{|\dot{\rho} \wedge \ddot{\rho}|}{|\dot{\rho}|^3}, \quad \tau = \frac{(\dot{\rho}, \ddot{\rho}, \dddot{\rho})}{|\dot{\rho} \wedge \ddot{\rho}|^2}$$

Dejamos la fórmula de la torsión como ejercicio (se sugiere calcular  $(\dot{\rho}, \ddot{\rho}, \dddot{\rho})$  en función de  $(\alpha', \alpha'', \alpha''')$ ).

Ejemplo:

1.2) Curvatura de una curva plana dada por una función  $y = f(x)$ ,  $x \in I$ .

Definimos  $P(x) = (x, f(x))$ ,  $x \in I$ .

Denotamos  $P(x)$  a la derivada respecto al parámetro  $x$ , para usar las fórmulas:

$$P = (1, f'(x)), \quad P = (0, f''(x))$$

$$\|P\| = |f'(x)|$$

$$k(x) = \frac{|f'(x)|}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$$

Con la notación usual para derivadas de funciones:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}}$$

## 6.0 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se ha trabajado con funciones de una variable, es decir funciones con dominio en los reales. Las funciones toman valores en  $\mathbb{R}$  (caso habitual),  $y=f(x)$  o en  $\mathbb{R}^n$  (caso de las curvas), pero siempre tienen una sola variable independiente.

En diversas aplicaciones tiene interés estudiar funciones de varias variables, es decir con dominio en  $\mathbb{R}^n$ .

Para poner un ejemplo tomado de la física, si se quiere describir la temperatura del aire en una región del espacio, se está ante una función del tipo  $T(x, y, z)$  donde  $(x, y, z)$  son las coordenadas del punto (vector de  $\mathbb{R}^3$ ) y  $T$  es un número real. Se está ante una función de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}$ .

Si ahora queremos describir la velocidad de cada partícula de aire, tenemos una función  $V(x, y, z)$  donde  $V$  es un vector de  $\mathbb{R}^3$ . Es decir, tenemos una función de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ .

¿Qué se quiere estudiar de estas funciones? En principio, se pretende extender, en la medida de lo posible, toda la teoría disponible para funciones de una variable: continuidad, derivadas, integración, etc.

A lo largo de este capítulo y el siguiente se verá que es posible, con algunas limitaciones, esta extensión. En el capítulo 6 trataremos el cálculo diferencial de varias variables, en el capítulo 7 la integración.

El planteo más general es estudiar las funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ , es decir con  $n$  variables y tomando valores en  $\mathbb{R}^m$ . Por simplicidad, se difiere ésto para el final del capítulo y se emplea por el caso  $m=1$ ; funciones reales de varias variables. Los principales conceptos aparecen en este caso y no es difícil extenderlos.