

CAPITULO I

CALCULO VECTORIAL

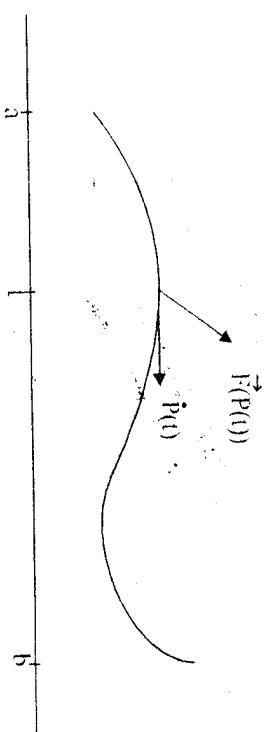
I) Integrales curvilíneas, campos de gradiente, irrotacionales y solenoidales:

1- INTRODUCCION

Si \vec{F} es un "campo de fuerzas" sobre una curva C que admite la representación paramétrica

$$\vec{P}(t) = \left(\begin{array}{c} x(t), y(t), z(t) \end{array} \right), a \leq t \leq b$$

entonces, para calcular el trabajo de \vec{F} a lo largo de C , es razonable proceder de la siguiente manera:



Para cada partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$ considerar la suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(t_i) \cdot \vec{P}(t_i) \Delta t_i$$

A la que se le llama el "límite de estas sumas cuando la norma de la partición tiende a cero".

Como veremos más adelante, en condiciones de regularidad dicho límite existe y vale

$$\int_a^b \vec{F}(\rho(t)) \cdot \vec{T}(t) dt$$

Estas breves consideraciones preceden poner de manifiesto la importancia de estudiar integrales de ese tipo.

2. INTEGRALES CURVILINEAS

DEFINICION

Una representación paramétrica es una función $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ definida y de clase C^1 en algún intervalo $[a, b]$ de la recta \mathbb{R} tal que $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

EJEMPLOS

1) $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3; \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ es una representación paramétrica cuyo trazo (su imagen) es la circunferencia unidad del plano xOy .

2) Dados dos puntos distintos $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ la función $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0), z_0 + t(z_1 - z_0))$$

es representación paramétrica cuyo trazo es el segmento AB.

DEFINICION

Dos representaciones paramétricas $(\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3)$ y $(\beta: [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^3)$ son equivalentes si existe

$$\psi: [a, b] \rightarrow [c, d] \text{ de clase } C^1 \text{ con } \psi'(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b] \text{ y tal que } \beta(t) = \psi(\alpha(t)), \quad \forall t \in [a, b].$$

entonces

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (x(\phi(t)), y(\phi(t)), z(\phi(t))) \Rightarrow \\ \alpha'(t) &= \left[\frac{dx}{ds}(\phi(t))\dot{\phi}(t), \frac{dy}{ds}(\phi(t))\dot{\phi}(t), \frac{dz}{ds}(\phi(t))\dot{\phi}(t) \right] \\ &\Rightarrow \dot{\alpha}(t) = \dot{\phi}(t)\tilde{\beta}(s) \end{aligned}$$

(interpretar este resultado)

Observaciones:

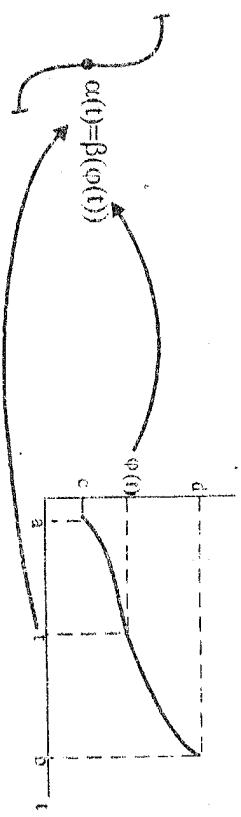
i) La relación definida es de equivalencia (verificarlo). Cada clase de equivalencia es una curva. El trazo de una curva es el trazo de cualquiera de sus representaciones paramétricas.

ii) Sea C una curva y $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ una representación paramétrica cualquiera de C . Es fácil verificar que la función $\tilde{\alpha}: [-a, -b] \rightarrow \mathbf{R}^3 / \tilde{\alpha}(t) = \alpha(-t)$ es también una representación paramétrica y que si β es equivalente a α entonces $\tilde{\beta}$ es equivalente a $\tilde{\alpha}$.

TEOREMA:

Si $(\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3)$ y $(\beta: [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^3)$ son representaciones de la misma curva C y $\vec{X}: tr(C) \rightarrow \mathbf{R}^3$ es continuo entonces:

$$\int_a^b \vec{X}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) dt = \int_c^d \vec{X}(\beta(u)) \cdot \beta'(u) du$$



Demonstración:

Como $\{(\alpha_i, \beta_i)\}, \{(\beta_i, \gamma_i)\}$ existe $\varrho_{\{(\alpha_i, \beta_i)\}} \star \varrho_{\{(\beta_i, \gamma_i)\}}$ de clase C^1 con $\varrho_i(t) > 0 \quad \forall t \in (\alpha_i, \beta_i) \quad \forall i \in I$.

Por el teorema del cambio de variable se tiene que

$$\int_C V(\beta(u)) \cdot f^*(u) du = \int_a^b V(\beta(\alpha(t))) f^*(\alpha(t)) \dot{\alpha}(t) dt =$$

$$= \int_a^b V(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) dt$$

DEFINICIÓN

Si C es una curva y $V: \mu(C) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es continua entonces la integral de V a lo largo de C se define por definición el numero:

$$\boxed{\int_C V(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) dt} = \int_C \tilde{V} ds$$

en donde $\sigma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una representación cualquiera de C .

A la integral de V a lo largo de C también le llamaremos circulación de V a lo largo de C y la simbolizaremos así:

$$\int_C V$$

o también

$$\int_C dX + \frac{dY}{X} dt + K dt$$

Propiedades

i) $\int_C (cV + h) ds = c \int_C V ds$ si V, h son continuas en $\mu(C)$.

$$ii) \int_C V ds = \int_{C_1} V ds + \int_{C_2} V ds$$

$$iii) \left| \int_C V ds \right| \leq M \operatorname{long}(C) \text{ siendo } M = \max \{ \|V(p)\| : p \in \mu(C) \}$$

Demonstración:

i) Inmediata a partir de las propiedades del producto escalar y de funciones continuas de una variable.

2) Ejercicio

$$\begin{aligned} i) \quad \left| \int_C V ds \right| &\leq \left| \int_C \tilde{V} ds \right| \leq \int_C \|\tilde{V}\| ds \\ &\leq \int_C \int_a^b \|\tilde{V}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)\| dt ds \leq \int_a^b \int_C \|\tilde{V}(\alpha(t))\| \|\dot{\alpha}(t)\| dt ds \end{aligned}$$

$$ii) \quad \int_C V ds = \int_C \int_a^b \|\tilde{V}(\alpha(t))\| dt ds = M \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt = M \operatorname{long}(C)$$

Algo $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una representación paramétrica de C

DEFINICIÓN

Una función $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una representación paramétrica regular a trozos si existe un número finito de puntos t_0, \dots, t_n con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tales que $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C^1$ es una representación paramétrica $\forall i = 0, \dots, n - 1$.

En este caso diremos que α determina una curva regular a trozos C y escribiremos

$$C = \bigcup_{i=0}^{n-1} C_i, \text{ siendo } C_i \text{ la curva de representación } \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}.$$

Si \tilde{X} es una función continua en $tr(C) = \bigcup_{i=0}^{n-1} tr(C_i)$ entonces definimos:

$$\int \tilde{X} d\tilde{s} = \sum_{i=0}^{n-1} \int \tilde{X} d\tilde{s}_i$$

3- RELACION ENTRE CAMPOS DE GRADIENTE Y CAMPOS CONSERVATIVOS.

Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 en el abierto U y $p \in U$, el gradiente de f en p es el vector:

$$\nabla f(p) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right]$$

Si el punto p pertenece a la superficie de nivel $S_f = \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$ entonces $\nabla f(p) \perp T_p S_f$. (Se sugiere repasar esta y otras propiedades del gradiente).

**DEFINICIÓN**

$V: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continuo en el abierto U es un campo de gradientes si existe $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 s.t. $V = \nabla V$ en U . Se dice que V es un potencial escalar de V .

Si U es conexo entonces dos potenciales de un campo de gradientes difieren en una constante en efecto, si $\tilde{V} = V + C$ $\tilde{V} = \nabla \tilde{V}$ en $U \Rightarrow \nabla(\tilde{V} - V) = \nabla V - \nabla V = 0$ en $U \Rightarrow \tilde{V} - V$ es constante en U .

EJEMPLO:

Se sabe que el campo eléctrico creado por una carga puntual positiva q que viene dado por

$$\vec{F}(p) = k \frac{q}{|p - 0|^2} \frac{p - 0}{|p - 0|}$$

$\vec{F}(p) \rightarrow \vec{F}$

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

que en coordenadas cartesianas queda:

$$\vec{F}(x, y, z) = k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

Un simple cálculo muestra que la función

$$V(x, y, z) = -k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

verifica $\vec{F} = \nabla V$ de donde resulta que \vec{F} es de gradientes. El potencial eléctrico es la función V que verifica

$$\vec{F} = -\nabla V \quad V'(x) = 0$$

con lo cual

$$V(x, y, z) = k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

TEOREMA

Sea $\tilde{V} : U \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ continua en el abierto U . Son equivalentes

- i) $\int_U \tilde{V}(t) dt \rightarrow \mathbf{R}$ ($t \in U$) $\forall t$ en U , \tilde{V} es de gradiente.

$$\text{ii)} \quad \int_U \tilde{V}_i(t) dt = 0 \quad \forall i \quad \text{curva regular a trozos, simple cerrada con } \alpha(t) \subset U$$

iii) $\int_U \tilde{V}_i(t) dt = \int_U \tilde{V}_j(t) dt \quad \forall$ pareja de curvas c_i, c_j con el mismo origen el mismo extremo v con trazos contenidos en U (\tilde{V} es conservativo).

Demonstración:

Es inmediato verificar que 2) es equivalente con 3) (hacerlo).

1) \Rightarrow 2) Sea C curva cerrada con $\alpha(t) \subset U$ y $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3 / \alpha(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ una representación de C .

$$\tilde{V} = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

Sea $p^*(x, y, z)$, si h es suficientemente pequeño es $pf^* \subset U$.

Tomenos h curva t^n de representación

$$\int_U \tilde{V}_i(t) dt = \int_U \left[f_x(\alpha(t)) \dot{x}(t) + f_y(\alpha(t)) \dot{y}(t) + f_z(\alpha(t)) \dot{z}(t) \right] dt =$$

$$= \int_a^b f_x(\alpha(t)) dt + f_y(\alpha(b)) - f_y(\alpha(a)) = 0$$

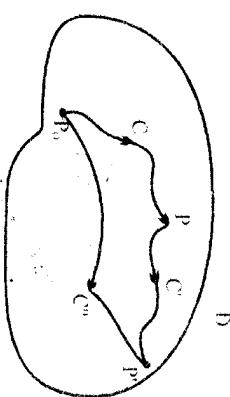
para $\alpha(a) = \alpha(b)$.

$$\int_U \tilde{V}(t) dt = h \int_U f^*(x, y, z) dt = h f^*(x, y, z)$$

siendo C una curva cualquiera simple con origen p_0 , extremo $p(x, y, z)$ y con $\alpha(t) \subset U$ (\exists una tal curva por ser D conexo abierto). Convendremos en llamar conexo a un subconjunto Ω en \mathbf{R}^n tal que dados dos puntos cualesquiera del mismo, existe una curva continua que va de un punto a otro cuyo trazo está contenido en Ω . Este concepto es el de arco conexión; concepto más fuerte que el de conexión (ya que arco conexión implica conexión). Pueden darse ejemplos de conjuntos conexos que no son arco-conexos.

Probaremos que $\nabla f = \tilde{V}$ con lo que resultará $f \in C^1$ en D .

$$f(t) \rightarrow \mathbf{R} / f(x, y, z) = \int_U \tilde{V}_i(t) dt$$



para algún $\theta \in (0, 1)$. Se deduce que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(x+h, y, z) - \mathbf{f}(x, y, z)}{h} = P(x, y, z)$$

de donde resulta que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} &= P \text{ en D} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} &= Q \text{ en D} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} &= R \text{ en D}\end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = Q$ y $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = R$ en D.

Como P, Q, R son continuas resulta que \mathbf{f} es C^1 en D y $\nabla \mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}$ en D . Trabajando de modo análogo en cada componente conexa de U se obtiene el resultado.

Q.E.D.

Observación: Si $\mathbf{f}: U \rightarrow \mathbf{R}$ es un potencial escalar de $\tilde{\mathbf{f}}$ en U y C es una curva con $tr(C) \subset U$ de origen A y extremo B entonces se tiene que:

$$\int_C P dx + Q dy = \mathbf{f}(B) - \mathbf{f}(A)$$

No demostraremos éste importante resultado; sólo verificaremos la fórmula en un caso particular, a saber: el caso en que existen funciones $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi, \psi: [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1 tales que:

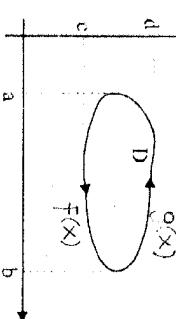
$$D = \{(x, y), a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\} = \{(x, y) / c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

Es claro que:

$$\int_C (P, Q) d\mathbf{s} = \int_C (P, 0) d\mathbf{s} + \int_C (0, Q) d\mathbf{s}$$

y también

$$\begin{aligned}\iint_D (Q_x - P_y) dx dy &= \iint_D Q_x dx dy - \iint_D P_y dx dy \\ &= \int_a^b \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} (Q_x - P_y) dx dy.\end{aligned}$$

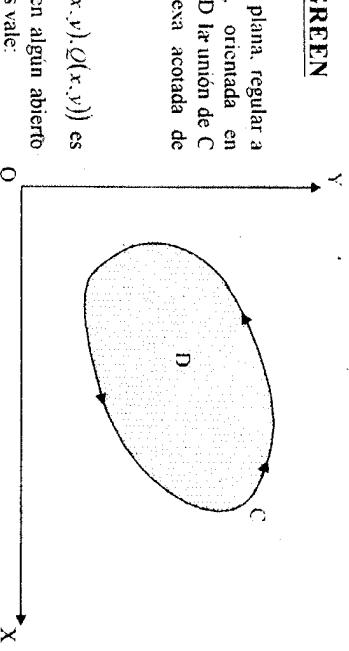


4- TEOREMA DE GREEN

Sea C una curva plana, regular a trazos, simple, cerrada, orientada en sentido antihorario y sea D la unión de C con la componente conexa acotada de $\mathbf{R}^2 - C$.

Si $\tilde{\mathbf{f}}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ es un campo de clase C^1 en algún abierto que contiene a D entonces vale:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$



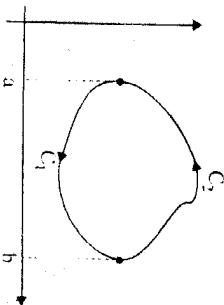
Se tiene $\int_C \left(P_x + Q_y \right) dx + dy$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} P_y dy \right] dx = \int_a^b \left(P(x, g(x)) - P(x, f(x)) \right) dx = \\ &= \int_a^b P(x, f(x)) dx - \int_a^b P(x, g(x)) dx \end{aligned}$$

Por otro lado, parametrizando C_1 y C_2 obtendremos:

$$\begin{aligned} \int_C (P, Q) \cdot d\vec{s} &= \int_{C_1} (P, Q) \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} (P, Q) \cdot d\vec{s} = \\ &= \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt \end{aligned}$$

Análogamente se verifica que:



$$\int_C (P, Q) \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} (P, Q) \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} (P, Q) \cdot d\vec{s}$$

Importantes aplicaciones de la fórmula de Green se estudiarán en los próximos temas.

RELACION ENTRE CAMPOS IRROTACIONALES Y GRADIENTES

DEFINICION

Si $V: U \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ es cl¹, definimos $rot(V)$ si $V \in U \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ dado por

$$rot(\vec{V}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} & \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ si } \vec{V} = (P, Q, R)$$

Dicemos que V es irrotacional si $rot(V) \equiv 0$ en U .

Propiedades

- 1) $rot(a\vec{V} + b\vec{W}) = a \ rot(\vec{V}) + b \ rot(\vec{W}) \quad a, b \in \mathbb{R}$
- 2) $rot(f \vec{V}) = f \ rot(\vec{V}) + \nabla f \wedge \vec{V} \quad f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{V}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- 3) $rot(\nabla f) = 0$ si f es de clase C^2 .

(La prueba es ejercicio).

$$\vec{F} = \vec{P}(x, y, z) \Rightarrow \nabla \vec{P} \cdot \vec{F} = 0$$

Observemos que la propiedad 3) nos dice que si \vec{V} es de gradiente ($\vec{V} = \nabla f$) entonces

\vec{V} es irrotacional ($rot(\vec{V}) = 0$). El reciproco no es cierto como lo muestra el siguiente ejemplo:

$$\vec{V} \cdot \vec{R} = \{(0, 0)\} \rightarrow \vec{R} \cdot \vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & x \\ x^2 + y^2 & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = (P, Q)$$

Sea $\vec{V} = (Q, -P)$ $k \neq 0 \Rightarrow \vec{V}$ es irrotacional

Si embargo, \vec{V} no es de gradientes en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Si lo fuera se tendría

$\vec{V} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall C$ cerrada, pero si C es la dada por la representación paramétrica: $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ se tiene

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi \neq 0$$

Veremos que este resultado se debe a que el dominio $\mathbf{R}^3 - \{(0,0)\}$ tiene "agujeros".

DEFINICION.

Una curva cerrada C , $m(C) \subset U$, es homotópica a un punto en U si $H: [0,1] \times [a,b] \rightarrow U$ continua satisface $H(s,a) = H(s,b) \quad \forall s \in [0,1]$, $H(0,t) = \alpha(t) \quad \forall t \in [a,b]$ siendo $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ una representación paramétrica de C .

Poniendo $\gamma(t) = H(s,t)$ obtenemos una familia uniparamétrica de caminos continuos que "conectan" C con el punto $P_0 = \alpha(a) = \alpha(b)$.

Intuitivamente esto significa que C puede deformarse (dentro de U) continuamente hasta P_0 .

DEFINICION.

U es simplemente conexo si es abierto, conexo y toda curva cerrada en U es homotópica a un punto en U.

EJEMPLO:

Todo abierto convexo es simplemente conexo. (Verificarlo).

TEOREMA:

Si $\tilde{X}: U \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ es irrotacional y U es simplemente conexo entonces \tilde{X} es un campo de gradientes de U.

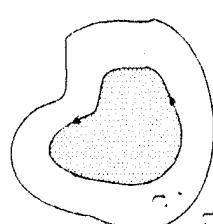
Demonstración:

Haremos la demostración para el caso en que \tilde{X} sea un campo plano.

$$\tilde{X}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)), \text{ con } (x,y) \in U \subset \mathbf{R}^2.$$

Para probar que \tilde{X} es de gradientes en U alcanza con probar que $\int_C \tilde{X} \cdot d\vec{s} = 0$ para toda curva cerrada simple regular a trazos contenida en U. (Por qué?).

Sea entonces una curva regular a trazos, cerrada, simple, con $m(C) \subset U$. Supongamos que C es simple. Sea D la unión de C con la componente conexa acotada de $\mathbf{R}^3 - C$.



Como U es simplemente conexo resulta que $J_C \subset U$. luego podemos aplicar la fórmula de Green obteniendo,

$$\int_C \tilde{X} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = 0$$

por ser $Q_x - P_y \equiv 0$. $\Rightarrow \int_C \tilde{X} \cdot d\vec{s} = 0$. Q.E.D.

Q.E.D.

6- OPERADOR DIVERGENCIA, POTENCIAL VECTORIAL

DEFINICION.

Dado

$\tilde{X}: U \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ de clase C^1 definimos

$$\operatorname{div} \tilde{X} = P_x + Q_y + R_z, \text{ siendo } \tilde{X} = (P, Q, R)$$

Propiedades:

- 1) $\operatorname{div} (a\tilde{X} + b\tilde{Y}) = a \operatorname{div} (\tilde{X}) + b \operatorname{div} (\tilde{Y})$
- 2) $\operatorname{div} (\tilde{f}\tilde{X}) = \tilde{f} \operatorname{div} (\tilde{X}) + \nabla \tilde{f} \cdot \tilde{X}$
- 3) $\operatorname{div} (\operatorname{rot} \tilde{X}) \equiv 0 \quad \text{si } \tilde{X} \text{ es } C^2$

$$\tilde{X} \vee \tilde{Y} = \tilde{Y} \cdot \tilde{X}$$

TEOREMA: Si $\tilde{f}: U \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ es de clase C^2 en el paralelepípedo de lados paralelos a los ejes U y $\operatorname{div} \tilde{f} = 0$ (\tilde{f} es solenoidal) entonces existe $\tilde{V}: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que $\tilde{f} = \operatorname{rot} \tilde{V}$.



Demonstración:

Busquemos un campo \tilde{X} de la forma $\tilde{X} = (P, Q, 0)$ que cumple $rot \tilde{X} = \tilde{Y}$.

Se tiene:

$$rot \tilde{X} = \tilde{Y} \Rightarrow (-Q_z, P_z, Q_x - P_y) = (Y_1, Y_2, Y_3) \Rightarrow \begin{cases} Q_z &= -Y_1 \\ P_z &= Y_2 \\ Q_x - P_y &= Y_3 \end{cases}$$

Fijemos un punto (x_0, y_0, z_0) en U . La solución general de la primera ecuación es:

$$Q(x, y, z) = - \int_{z_0}^z Y_1(x, y, z) dz + \alpha(x, y)$$

y la de la segunda es:

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= \int_{z_0}^z Y_2(x, y, z) dz + \beta(x, y) \\ Q(x, y, z) &= - \int_{z_0}^z \frac{\partial Y_3}{\partial z}(x, y, z) dz - \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = Y_1(x, y, z) - Y_3(x, y, z_0) - \\ &\quad - \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = -Y_3(x, y, z_0) - \\ &\quad - \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = -Y_3(x, y, z_0) \end{aligned}$$

y esta ecuación en $\beta(x, y)$ tiene soluciones

$$-\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = -Y_3(x, y, z_0)$$

Q.E.D.

Un campo \tilde{X} tal que $\tilde{Y} = rot \tilde{X}$ se dice que es un potencial vector de \tilde{Y} .

El problema de la existencia de un tal campo \tilde{X} se reduce a encontrar funciones $\alpha(x, y)$ y $\beta(x, y)$ para las cuales los P y Q anteriores verifiquen también la tercera ecuación

$$Q_x - P_y = Y_3$$

tomenos $\alpha(x, y) \equiv 0$. P y Q verifican la tercera ecuación si y solo si:

$$\begin{aligned} Y_3(x, y, z) &= - \int_{z_0}^z \frac{\partial Y_1}{\partial x}(x, y, z) dz - \int_{z_0}^z \frac{\partial Y_2}{\partial y}(x, y, z) dz - \\ &\quad - \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y, z) dz - \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} \right)(x, y, z) dz - \\ &\quad - \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) \Rightarrow Y_3(x, y, z) = - \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} \right)(x, y, z) dz - \end{aligned}$$

TEOREMA: Dos potenciales vectores de un mismo campo \tilde{Y} en un simplemente conexo difieren en el gradiente de algún campo escalar.

Demonstración:

En el teorema anterior, además del potencial vector construido hay infinitos, en efecto, si $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ es cualquier función C^2 y $\tilde{f} = \tilde{X} + \nabla f$ entonces $rot \tilde{f} = rot \tilde{X} + rot(\nabla f) = rot \tilde{X} = \tilde{Y} \Rightarrow \tilde{f} = \tilde{Y}$ también es potencial vector de \tilde{Y} . Todos los potenciales vectores son de esa forma como lo muestra el siguiente teorema.

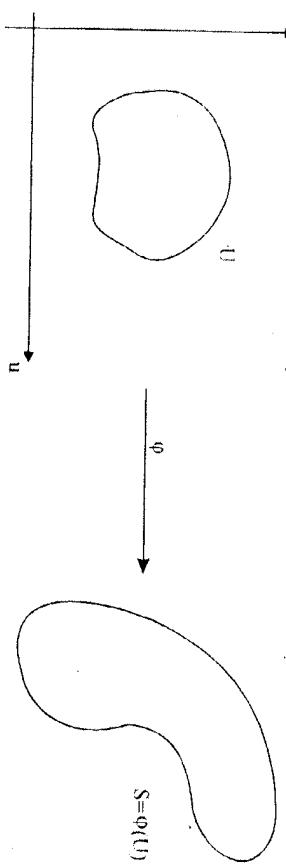
$$3. \tilde{f}: U \rightarrow \mathbf{R} / \tilde{V}' \cdot \tilde{V}' = \nabla V'$$

Q.E.D.

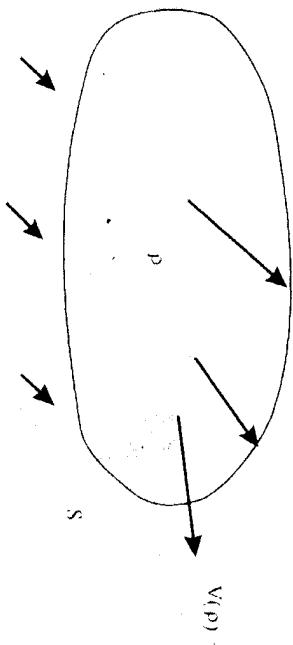
II) Integrales de superficie, Teoremas de Stokes y Gauss.

I- INTRODUCCIÓN

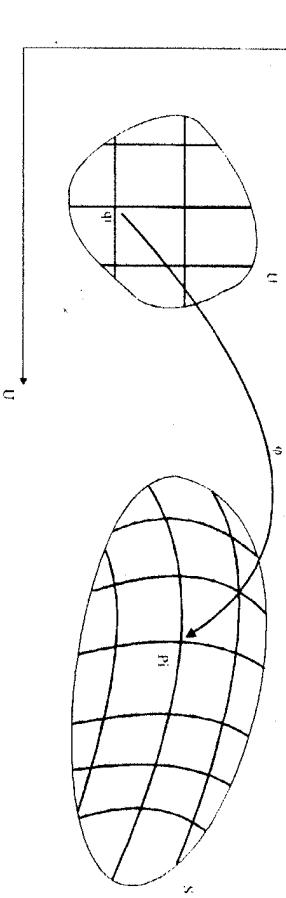
Sea S una superficie paramétrizable, (t, φ) una parametrización de S y $\tilde{N} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$ un campo de vectores normales a S .



Consideremos una corriente estacionaria de un fluido (la velocidad de cada partícula depende de su posición pero no del tiempo) que fluye a través de S . \vec{v} denota el campo de velocidades y ρ la densidad del fluido.



Queremos calcular el flujo de esta corriente a través de la superficie, esto es: la masa del fluido que atraviesa la superficie en la dirección de \tilde{N} por unidad de tiempo. Para ello es razonable trabajar de la siguiente manera: cada partición de U determina una partición de S .



Si la norma de la partición es pequeña entonces la masa que atraviesa S_i en el tiempo Δt (según \tilde{N}) es aproximadamente la que atraviesa el paralelogramo y esta es:

$$\mathcal{A}(p_i) \text{ área base } \Delta t \vec{v}(p_i) \cdot \tilde{N}(p_i) =$$

$$= \mathcal{A}(p_i) \Delta u \Delta v |\varphi_u(q_i) \wedge \varphi_v(q_i)| \Delta u \vec{v}(p_i) \cdot \tilde{N}(p_i) =$$

$$= \tilde{J}(p_i) N(p_i) |\varphi_u(q_i) \wedge \varphi_v(q_i)| \Delta u \Delta v \Delta t$$

siendo $\tilde{J}(x, y, z) = \mathcal{A}(x, y, z) \vec{v}(x, y, z)$ (vector densidad de corriente).

Sumando en todos los elementos de la partición obtenemos:

$$\sum_i \tilde{J}(\varphi(q_i), \tilde{N}(\varphi(q_i))) |\varphi_u(q_i) \wedge \varphi_v(q_i)| \Delta u \Delta v \Delta t$$

entonces la masa que atraviesa la superficie en la dirección de \tilde{N} por unidad de tiempo será:

$$\lim \sum_i \tilde{J}(\varphi(q_i), \tilde{N}(\varphi(q_i))) |\varphi_u(q_i) \wedge \varphi_v(q_i)| \Delta u \Delta v \Delta t \text{ norma } \rightarrow 0$$

En condiciones razonables este límite existe y vale:

$$\iint_U \tilde{J}(\varphi(u, v)) \cdot \tilde{N}(\varphi(u, v)) |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv$$

2- FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL

DEFINICION- Sean S superficie parametrizable orientada (se fija un campo \tilde{N} de vectores normales a S) y $\tilde{A}: S \rightarrow \mathbf{R}^3$ un campo vectorial continuo. El flujo de \tilde{A} a través de A en S es el índice:

$$\left[\iint_{\varphi^{-1}(A)} \tilde{N}(\varphi(u, v)) \cdot \tilde{A}(\varphi(u, v)) \varphi_u \wedge \varphi_v \right] du dv$$

siendo (U, φ) una parametrización de S y siempre que esa integral doble esté definida:

Notación:

$$\iint_S \tilde{A} \cdot \tilde{N} dS$$

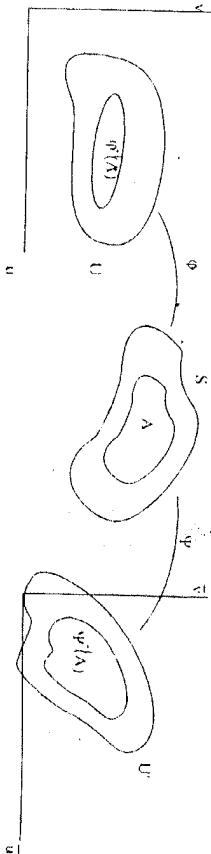
Hay que probar que el número definido NO depende de la parametrización que se elija para S .

TEOREMA: Si (U, φ) y (U', τ) son parametrizaciones de la superficie parametrizable S . $\tilde{A}: S \rightarrow \mathbf{R}^3$ es un campo vectorial continuo. $\tilde{N}: S \rightarrow \mathbf{R}^3$ campo de vectores normales a S y $A \subset S$ tal que $\varphi^{-1}(A)$ es medible Jordan \Rightarrow

$$\iint_{\varphi^{-1}(A)} \tilde{N}(\varphi(u, v)) \cdot \tilde{A}(\varphi(u, v)) |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv =$$

$$\iint_{\varphi^{-1}(A)} \tilde{N}(\tau(u, v)) \cdot \tilde{A}(\tau(u, v)) |\tau_u \wedge \tau_v| du dv$$

Demostración:



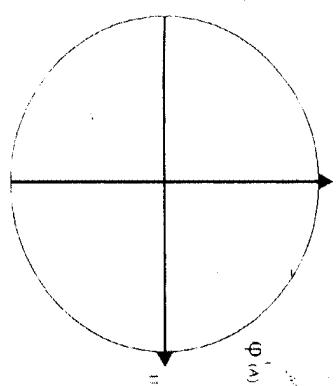
EJEMPLOS:
Sea $h: U \rightarrow U' / h(u, v) = \tau^{-1}(\varphi(u, v))$, h es difeo y $|h(\varphi^{-1}(A))| = \tau^{-1}(A)$. Luego, aplicando el teorema de cambio de variables para integrales dobles obtenemos:

$$\iint_{\varphi^{-1}(A)} f(\tau(\bar{u}, \bar{v})) |\tau_u(\bar{u}, \bar{v}) \wedge \tau_v(\bar{u}, \bar{v})| d\bar{u} d\bar{v} = \left(f = \tilde{N} \cdot \tilde{N} \right)$$

$$= \iint_{\tau^{-1}(A)} f(\varphi(u, v)) |\tau_u(h(\bar{u}, \bar{v})) \wedge \tau_v(h(\bar{u}, \bar{v}))| |h(\bar{u}, \bar{v})| du dv$$

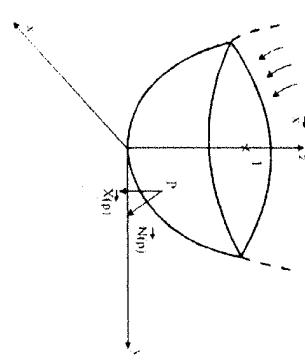
$$\text{con } |\tau_u(h(\bar{u}, \bar{v})) \wedge \tau_v(h(\bar{u}, \bar{v}))| = |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)|$$

Q.E.D.



"Saliente". $\tilde{N}(x, y, z)$ colineal con $(2x, 2y, -1)$.

$$\varphi^{-1}(A) = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 / 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1\}$$



$$\vec{N}(\varphi(u, v)) = (0, 0, -1) \text{ y } \vec{N}(\varphi(u, v)) = \frac{(2u, 2v, -1)}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

$$\vec{N}(\varphi(u, v)), \vec{N}(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

$$\varphi_u = (1, 0, 2u), \varphi_v = (0, 1, 2v), \varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = \sqrt{1+4u^2+4v^2} \Rightarrow \int_A \vec{N} \cdot \vec{N} dS = \int_{\varphi^{-1}(A)} \mathbf{f} du dv =$$

$$= \text{área } \varphi^{-1}(A) = \Omega.$$

Propiedades:

1) Si \vec{X}, \vec{Y} son campos continuos sobre S y $A \subset S / \varphi^{-1}(A)$ med. Jordan

$$\Rightarrow \iint_A (\alpha \vec{X} + \beta \vec{Y}) \cdot \vec{N} dS = \alpha \iint_A \vec{X} \cdot \vec{N} dS + \beta \iint_A \vec{Y} \cdot \vec{N} dS$$

$$2) \quad \left| \iint_A \vec{N} \cdot \vec{N} dS \right| \leq M \text{ área}(A) \text{ siendo } M = \left\{ \sup \left| \vec{N}(p) \right| \mid p \in A \right\}$$

Demonstración:
Ejercicio.

2) Flujo del campo eléctrico $\vec{E}(r) = k \frac{q}{r} \vec{r}$ a través de una esfera de centro q , radio r_0 , con la normal \vec{N} "saliente". En este caso es:

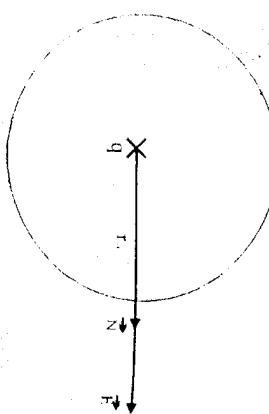
$$\vec{E} \cdot \vec{N} = |\vec{E}| \equiv \frac{kq}{r_0} \text{ sobre}$$

$$S = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{N} dS = \frac{kq}{r_0} \iint_S dS = \frac{kq}{r_0} 4\pi r^2 = 4\pi kq = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{con } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Observación: Si elegimos como campo de vectores normales a

$$\vec{N} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$$



3-INTEGRAL DE UN CAMPO ESCALAR SOBRE UNA SUPERFICIE

DEFINICION: Sea S una superficie parametrizable orientada, $f: S \rightarrow \mathbf{R}$ un campo escalar continuo sobre S y $A \subset S$. La integral de f sobre S es:

$$\iint_A f(\varphi^{-1}(t, \vartheta)) |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv$$

siendo (t, ϑ) una parametrización de S .

Notación: $\iint_A f dS$

Las propiedades de estas integrales, así como también una interpretación física quedan como ejercicios.

se obtiene:

$$\vec{N} \cdot \vec{N} |\varphi_u \wedge \varphi_v| = \vec{N} \cdot \varphi_u \wedge \varphi_v = (\vec{N}, \varphi_u, \varphi_v)$$

con lo cual:

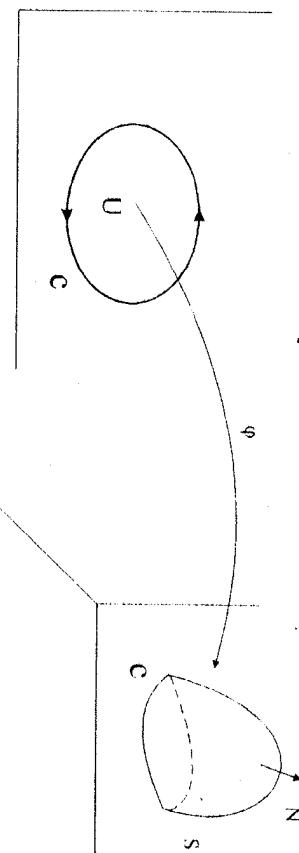
$$\iint_A \vec{N} \cdot \vec{N} dS = \iint_{\varphi^{-1}(A)} (\vec{N}, \varphi_u, \varphi_v) du dv$$

4. TEOREMA DE STOKES

TEOREMA DE STOKES. Sea C una curva plana regular a trazos simple cerrada orientada en sentido antihorario y designemos con U a la componente conexa acotada de $\mathbf{R}^2 - C$.

Supongamos que φ es una parametrización en algún abierto que contiene a $\bar{U} = U \cup C$ y sea

$S = \varphi(U)$. Es claro que S es una superficie parametrizable y que $C = \varphi(C)$ es una curva regular a trazos, simple, cerrada que llamaremos el borde de S .



La orientación de C queda determinada a partir de la de C (vía φ). Si $\vec{N} = (P, Q, R)$ es un campo vectorial de clase C^1 en algún abierto que contiene a $S \cup C$, entonces:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \text{rot } (\vec{N}) \cdot \vec{N} dS$$

sabiendo \vec{N} el campo normal dado por $\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$.

Demostración:

Probaremos el teorema en el caso en que $S = \text{Graf}(f)$ siendo $f: U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1 en algún abierto que contiene a \bar{U} (la seguiremos llamando f_1).

Tenemos entonces la parametrización $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$

$S = \varphi(U)$, $C = \varphi(C)$.

Se tiene:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{N}, \varphi_u, \varphi_v) &= [(Q_x - P_y) - f_x(P_z - R_z) - f_y(R_z - Q_z)] \Rightarrow \\ \iint_S \text{rot } (\vec{N}) \cdot \vec{N} dS &= \iint_U [\text{rot } (\vec{N}, \varphi_u, \varphi_v)] du dv = \\ &= \iint_U [(Q_x - P_y) - f_x(P_z - R_z) - f_y(R_z - Q_z)] dx dy \end{aligned}$$

Si aplicamos el teorema de Green al campo plano $\vec{Y} = (L, M)$ dado por:

$$\begin{aligned} L(x, y) &= P(x, y, f(x, y)) + f_x(x, y) R(x, y, f(x, y)) \\ M(x, y) &= Q(x, y, f(x, y)) + f_y(x, y) R(x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

obtenemos:

$$L(x, y) = P(x, y, f(x, y)) + f_x(x, y) R(x, y, f(x, y))$$

$$M(x, y) = Q(x, y, f(x, y)) + f_y(x, y) R(x, y, f(x, y))$$

obtenemos:

$$\int_C L dx + M dy = \iint_U (M_x - L_y) dx dy = \iint_{\bar{U}} [] dx dy$$

Para terminar la prueba alcanza con ver que:

$$\int_C L dx + M dy = \int_U P dx + Q dy + R dz$$

Supongamos que $\alpha(t) = (\psi(t), \nu(t))$, $a \leq t \leq b$ es una representación paramétrica de C con lo cual, $\gamma(t) = (\psi(t), \nu(t), \nu(t))$, $a \leq t \leq b$, lo será de \mathbb{C} se tiene:

$$\begin{aligned} \int_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz &= \int_a^b \left\{ P(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) + Q(\gamma(t)) \dot{\nu}(t) + \right. \\ &\quad \left. + R(\gamma(t)) \left(f_1(\gamma(t)) \dot{\nu}(t) + f_2(\gamma(t)) \nu(t) \right) \right\} dt = \\ &= \int_a^b (P + f_1 R) \dot{\nu}(t) + (Q + f_2 R) \nu(t) dt = \\ &= \int_a^b (L \dot{\nu} + M \nu) dt = \int_C L \, dx + M \, dy \end{aligned}$$

Interpretación intrínseca del rotor

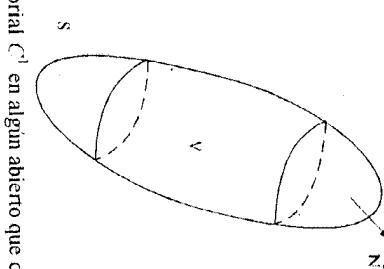
Sea $\vec{X} = (P, Q, R)$ un campo C^1 en un abierto $V \subset \mathbb{R}^3$, $p_0 \in V$, \vec{n} cualquiera con $|\vec{n}| = 1$

y consideremos un disco S_r de centro p_0 , radio r en un plano $\perp \vec{n}$ por p_0 . Por el teorema de Stokes se tiene:

$$\int_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_S \text{rot } (\vec{X}) \cdot \vec{n} \, dS$$

Demostración:
Probaremos el teorema en el caso particular en que:

$$\begin{aligned} n \cdot \text{rot } \vec{X}(q) &= \frac{1}{\text{área } S_r} \iint_{S_r} \vec{X} \cdot d\vec{s} \Rightarrow n \cdot \text{rot } \vec{X}(p_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{área } S_r} \iint_{S_r} \vec{X} \cdot d\vec{s} \\ &= \iint_D \text{div } (\vec{X}) \, dV = \iint_S \vec{X} \cdot \vec{n} \, dS \end{aligned}$$



Si \vec{X} es un campo vectorial C^1 en algún abierto que contiene a $\bar{V} = V \cup S$ entonces:

$$\iint_V \text{div } (\vec{X}) \, dV = \iint_S \vec{X} \cdot \vec{n} \, dS$$

Por el teorema del valor medio existe $q \in S_r / \iint_{S_r} \text{rot } (\vec{X}) \cdot \vec{n} \, d\vec{s} = \text{rot } \vec{X}(q) \cdot \vec{n}$ área (S_r) \Rightarrow

$$\begin{aligned} n \cdot \text{rot } \vec{X}(q) &= \frac{1}{\text{área } S_r} \iint_{S_r} \vec{X} \cdot d\vec{s} \Rightarrow n \cdot \text{rot } \vec{X}(p_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{área } S_r} \iint_{S_r} \vec{X} \cdot d\vec{s} \\ &= \iint_D \text{div } (\vec{X}) \, dV = \iint_S \vec{X} \cdot \vec{n} \, dS \end{aligned}$$

Queremos probar que $\iint_D (P_x + Q_y + R_z) \, dV = \iint_S (P n_1 + Q n_2 + R n_3) \, dS$, siendo $\vec{X} = (P, Q, R)$ y $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

Se tiene:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{N} \cdot \vec{N} dS &= \iint_D dv \vec{N} \cdot \vec{N} dV = \iint_D (2 + 2x + 2z) dV = \\ &= \iint_D 2 dV + \iint_D 2x dV + \iint_D 2z dV = \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

Demostraremos primero que $\iint_{D^+} R n_1 dV = \iint_S R n_1 dS$:

$$\iint_{D^+} R n_1 dV = \iint_D [R(f_1(x,y), f_2(x,y)) - R(x,y, f_1(x,y))] dx dy = *$$

$$S_2 = \{(x,y, f_2(x,y)) / (x,y) \in D\}$$

$$S_1 = \{(x,y, f_1(x,y)) / (x,y) \in D\}$$

$$\iint_S R n_1 dS = \iint_{S_1} R n_1 + \iint_{S_2} R n_1$$

Observamos que:

$$\vec{N}|_{S_1} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 - 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{N}|_{S_2} = \begin{pmatrix} -\mathcal{F}_1 \\ -\mathcal{F}_2 \\ -\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \iint_S R n_1 dS = \iint_{S_1} \frac{-R}{|R|} dS_1 + \iint_{S_2} \frac{R}{|R|} dS_2 =$$

$$\iint_D \frac{-R(x,y, f_1(x,y))}{\sqrt{1 + f_{1x}^2 + f_{1y}^2}} |\varphi_x \wedge \varphi_y| dx dy +$$

$$+ \iint_D \frac{-R(x,y, f_2(x,y))}{\sqrt{1 + f_{2x}^2 + f_{2y}^2}} |\varphi_x \wedge \varphi_y| dx dy = *$$

$$\iint_S P_x dV = \iint_S P n_1 dS \quad \iint_{D^+} Q_x dV = \iint_S Q n_2 dS$$

EJEMPLO:

$$\text{Sea } S = \{(x,y,z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \quad \vec{N}(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

Ley de Gauss del electromagnetismo: Recordemos que el campo eléctrico \vec{E} creado por una carga q_+ viene dado por:

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

La ley de Gauss afirma que el flujo de \vec{E} a través de cualquier superficie cerrada que "encierre" a q es igual a q/ϵ_0 .

Para probar esta afirmación comenzemos con observar que \vec{E} es solenoideal ($\operatorname{div} \vec{E} = 0$) en todo $R^3 - \{0\}$. (Verificarlo). Sean S_1 y S_2 como en la figura:

$$\text{Queremos probar que } \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{N}_1 dS_1 = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{N}_2 dS_2$$

Si $S = S_1 \cup S_2$ se tiene:

$$\iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{N}_2 dS_2 - \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{N}_1 dS_1 = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{N} dS = \iiint_V \vec{E} dV = 0$$

(siendo \vec{N} la normal saliente al volumen V encerrado por S)

Luego, el flujo no depende de la superficie. Para una esfera lo habíamos calculado y daba q/ϵ_0 . Este resultado vale en una situación más general: si en una porción del espacio se tiene un campo eléctrico $\vec{E}(x, y, z)$ y una densidad continua de carga $\varphi(x, y, z)$ entonces el flujo de \vec{E} a través de cualquier superficie cerrada es igual a $1/\epsilon_0$ por la carga neta encerrada por la superficie, esto es:

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{N} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \varphi dV$$

forma diferencial de la primera ecuación de Maxwell.

Este resultado se denomina 1^{α} ecuación de Maxwell. Aplicando el teorema de Gauss al 1^{er} miembro se tiene:

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \varphi dV \Rightarrow \iiint_V \left(\operatorname{div}(\vec{E}) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0 \quad \forall V \Rightarrow (\text{Por qué?})$$

$$\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$