PRÁCTICO 7

SISTEMAS DE PARTÍCULAS.

COLISIONES.

En los siguientes ejercicios repasaremos la definición y algunas propiedades del **centro de masa** de un sistema formado por varias partículas. Con esto buscamos generalizar las leyes de Newton, que fueron enunciadas para una partícula puntual. El movimiento del centro de masa del sistema está gobernado por una dinámica equivalente a la de una partícula sometida a las mismas fuerzas externas que el conjunto del sistema.

El concepto de la **cantidad de movimiento lineal** del sistema de partículas permite estudiar varias situaciones complejas de forma relativamente sencilla. La **Ley de conservación de la cantidad de movimiento** asegura que si las fuerzas externas sobre un sistema son cero, entonces la cantidad de movimiento permanece constante.

Una de las consecuencias más importantes de esta ley aparece en el estudio de las **colisiones entre partículas,** que además clasificamos en totalmente inelásticas, parcialmente inelásticas o perfectamente elásticas, en función de la transformación entre energía mecánica y energía interna del sistema. Veremos que la configuración final del sistema luego de un choque queda determinada por la conservación de la cantidad de movimiento y el tipo de colisión.

Objetivos de aprendizaje

- Definir el centro de masa para un sistema de partículas discretas.
- Definir la cantidad de movimiento para una partícula y para un sistema de partículas.
- Relacionar la aceleración del centro de masa con la fuerza externa sobre un sistema.
- Identificar las condiciones bajo las que se conserva la cantidad de movimiento de un sistema.
- Clasificar los tipos de colisiones.
- Utilizar las leyes de conservación para resolver diferentes situaciones.

Puedes profundizar sobre estos temas en los capítulos 9 y 10 del libro del curso. En el cuadro listamos los objetivos principales de este conjunto de ejercicios.

Ejercicio 1

a) Muestra que el centro de masa CM de un sistema formado por dos partículas puntuales A y B, de masas m_A y m_B respectivamente y separadas una distancia d, se sitúa en un punto en el segmento entre ellas. Demuestra también que si $m_A > m_B$ entonces la distancia entre A y G es menor que la distancia entre B y G. ¿Qué ocurre si $m_A < m_B$? ¿Y si $m_A = m_B$?

b) Muestra que el centro de masa de un sistema formado por tres o más partículas no alineadas, todas en un mismo plano del espacio, pertenece también al mismo plano.

c) Considera un sistema formado por un conjunto de N partículas en las posiciones $\vec{r}_i$ $(i = 1,2, \ldots, N)$, todas con el mismo valor de masa m.
Demuestra que el centro de masa del sistema se sitúa en su *centro geométrico* $\vec{r}_{\text{geom}}$, dado por

$$\vec{r}_{\text{geom}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i$$

d) Considera un sistema formado por un conjunto de N partículas con masas arbitrarias m_i $(i = 1,2, \ldots, N)$, en el cual todas las partículas tienen exactamente la misma velocidad $\vec{v}$. Prueba que en este caso la velocidad del centro de masa del sistema es también igual a $\vec{v}$.

e) ¿Puede ser nula la cantidad de movimiento de un sistema de varias partículas que tienen, cada una, una cantidad de movimiento no nula? Justifica.

f) ¿Por qué la *posición* y la *velocidad* del centro de masa de un sistema son ambos nulos en el sistema de referencia del propio centro de masa? ¿Bajo qué condiciones se puede considerar que este sistema de referencia es **inercial**? ¿Cuándo es nula la *aceleración* del centro de masa?

Ejercicio 2

Encuentra la posición del centro de masa de los sistemas de partículas mostrados en las figuras en términos de la distancia ℓ.

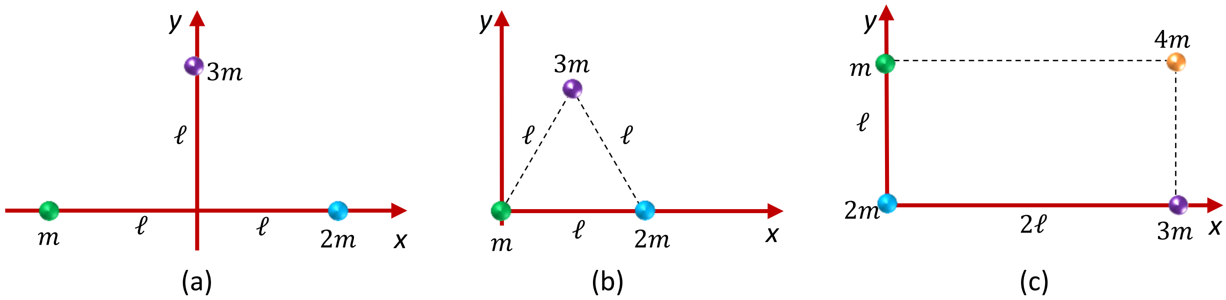

Figura del ejercicio 2

Ejercicio 3 (RHK ejercicio 9.6)

Dos patinadores, uno con 65 kg de masa y el otro con 42 kg de masa, están de pie en una pista de hielo sosteniendo una vara de 9,7 m de longitud y masa despreciable. Comenzando desde los extremos de la vara, los patinadores avanzan a lo largo de la misma hasta que se encuentran. ¿Qué distancia recorrerá el patinador de 42 kg?

Ejercicio 4 (RHK ejercicio 9.5)

Ricardo, que tiene una masa de 78,4 kg, y Judith, quien pesa menos, se encuentran en un lago dentro de una canoa de 31,6 kg. Cuando la canoa está en reposo en aguas tranquilas, intercambian asientos, los cuales se hallan separados a una distancia de 2,93 m y simétricamente situados con respecto al centro de masa de la canoa. Ricardo observa que la canoa se movió 41,2 cm con relación a un tronco sumergido y calcula la masa de Judith. ¿Cuál es esta masa?

Este es un posible camino para resolver este ejercicio:

- Considera un sistema de coordenadas en reposo con relación al tronco y elige un origen de coordenadas conveniente.
- Realiza un esquema para indicar las posiciones de Ricardo (R), Judith (J) y el centro de masa de la canoa (C) al comienzo .
- Muestra que el centro del sistema formado por los tres cuerpos {R,J,C} permanece en todo momento en reposo con respecto al sistema de coordenadas.
- Realiza un esquema para indicar las posiciones finales de los cuerpos en tu sistema de coordenadas. Intenta que este esquema refleje los desplazamientos de cada cuerpo con respecto a su situación inicial.
- Plantea las relaciones entre los distintos desplazamientos, tomando en cuenta que el largo de la canoa está fijo y los datos del enunciado.
- Iguala las expresiones para la posición del centro de masa del sistema en la situación inicial y final en términos de las posiciones de los cuerpos. Reemplaza las relaciones entre los desplazamientos de cada uno, y despeja la masa pedida.

Ejercicio 5

Un disco circular homogéneo de radio R, espesor δh y densidad de masa[1] ρ, tiene un hueco circular como se muestra en la figura. El radio del hueco es $R/2$. Determina la ubicación del centro de masa del objeto.

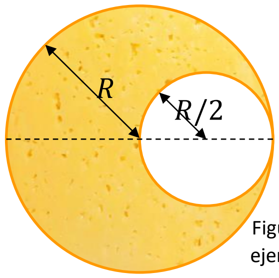

Figura del ejercicio 5

Ejercicio 6

a) Una partícula de 2 kg tiene una velocidad $\vec{v} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ y una partícula de 3 kg tiene una velocidad $\vec{v}_2 = \hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$, ambas velocidades medidas en m/s. Encuentra:

   i) La velocidad del centro de masa del sistema formado por las partículas.

   ii) La cantidad de movimiento del sistema.

b) ¿Pueden partículas de diferente masa tener una cantidad de movimiento de igual módulo? ¿Pueden partículas con diferente *velocidad* tener una cantidad de movimiento idéntica? Explica tus respuestas.

Ejercicio 7 (RHK ejercicio 10.62, LB ejemplo 10.4)

a) Una partícula de masa m_1 que se mueve a una velocidad v_{1i} choca de frente con m_2, inicialmente en reposo, en una colisión perfectamente inelástica.

   i) ¿Cuál es la energía cinética del sistema antes de la colisión?

   ii) ¿Cuál es la energía cinética del sistema después de la colisión?

   iii) ¿Qué fracción[2] de la energía cinética original se perdió?

b) Considera la misma colisión anterior, pero vista desde un sistema de referencia que se mueve con la velocidad v_{cm} del centro de masa.

   i) Verifica que las velocidades iniciales de las partículas, relativas a este sistema, son respectivamente $v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm}$ y $v'_{2i} = -v_{cm}$.

   ii) Contesta las preguntas de la parte (a) según el punto de vista de un observador en el sistema de referencia del centro de masa.

   iii) ¿Se pierde la misma fracción de energía cinética en cada caso? Explica el resultado.

c) Demuestra que en un choque *completamente elástico* entre dos partículas, observado desde su centro de masa, las cantidades de movimiento de cada partícula tienen el mismo módulo antes y después del choque, aunque pueden cambiar de dirección.

Ejercicio 8 (SZ, ejercicio 8.102)

Un proyectil de 20,0 kg se dispara con un ángulo de 60° sobre la horizontal y rapidez de 80,0 m/s. En el punto más alto de la trayectoria el proyectil estalla en dos fragmentos de igual masa; uno cae verticalmente con rapidez inicial cero. Ignore la resistencia del aire.

a) ¿A qué distancia del punto de disparo cae el otro fragmento si el terreno es plano?

b) ¿Cuánta energía se libera en la explosión?

---

[1] La *densidad volumétrica* de masa del objeto es $\rho = M/V$, donde M es su masa y V su volumen. Como el espesor del cuerpo es δh, el volumen es igual a $V = A\delta h$, donde A es el área de la base del cuerpo. La *densidad superficial* de masa se puede definir, en este caso, como $\sigma = M/A$, y se puede verificar que $\sigma = \rho\delta h$.

[2] Hay diferentes convenciones posibles para la fracción de energía perdida. Se puede utilizar, por ejemplo, el cociente $(K_i - K_f)/K_i$, donde K_i y K_f representan respectivamente la energía cinética del sistema antes y después de la colisión.

Ejercicio 9 (LB, ejercicio 10.37)

Un bloque de masa $m = 0{,}35$ kg que se mueve con velocidad $v_0 = 1{,}7$ m/s choca con un segundo bloque de masa $M = 0{,}65$ kg unido a un resorte de constante elástica $k = 2{,}5 \times 10^3$ N/m y longitud natural ℓ. ¿Cuál es la máxima compresión s del resorte? Encuentra las velocidades de salida u_m y u_M de cada bloque.

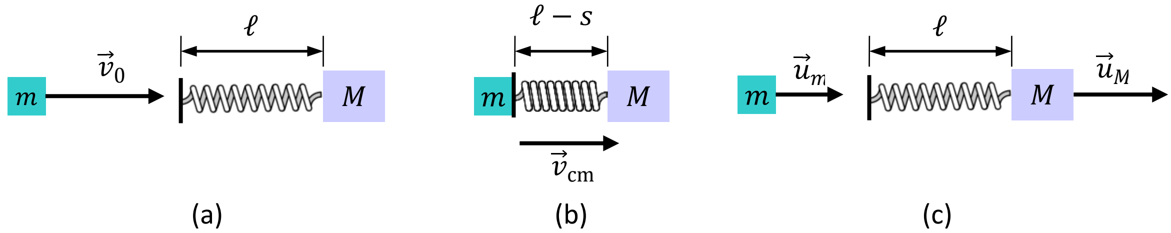

Figura del ejercicio 9

Ejercicio 10 (LB, ejercicio 10.38)

Un bloque de masa $m = 0{,}45$ kg que se mueve a 2,0 m/s realiza una colisión inelásticamente con un segundo bloque de masa $M = 0{,}35$ kg, en reposo, equipado con un resorte y una pinza que captura la masa m. ¿Cuánta energía se almacena en el resorte después del choque? Si la compresión del resorte es de 0,95 cm, ¿cuál es la constante del resorte?

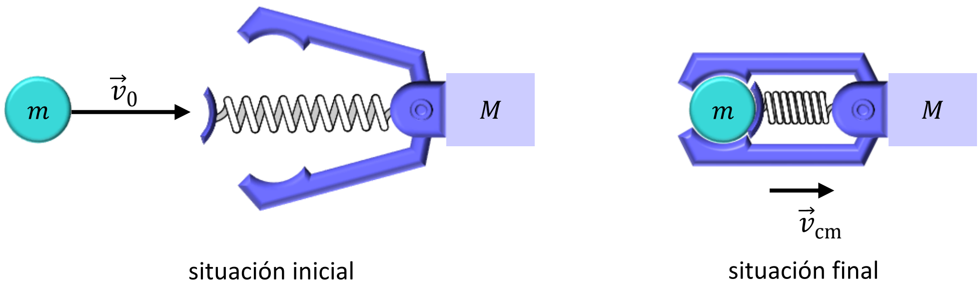

Figura del ejercicio 10

Ejercicio 11 (LB, ejercicio 10.27)

Dos partículas de masa m y $3m$, ambas con rapidez inicial v_0, se acercan y chocan como muestra la figura. Luego del choque salen dos partículas de masa $2m$ cada una.

Una de ellas tiene una velocidad final $\vec{v} = 3v_0\hat{\imath}$.

a) Determina la velocidad final de la otra partícula.
b) ¿Cuánta energía interna se convierte en energía cinética en el choque?

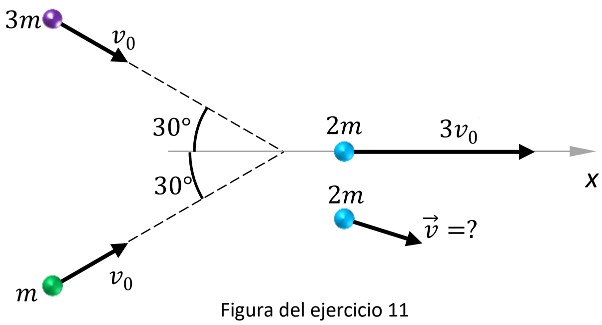

Figura del ejercicio 11

Ejercicio 12 (Examen de diciembre 2011)

Una partícula de masa m_1 tiene inicialmente una velocidad v_0 y choca con otra partícula de masa m_2 que está inicialmente en reposo. La primera partícula se desvía un ángulo θ y la velocidad final de la segunda partícula ($\vec{v}_2$) forma un ángulo φ con respecto a la dirección original. Sabiendo además que $m_1 = m_2$, encuentra una expresión para $\tan(\theta)$ en función de v_0, v_2 y φ.