INSTITUTO DE COMPUTACION.
FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA

Actividad Complementaria 3

Técnicas de Descomposición en Programación Matemática

Dr. Víctor M. Albornoz S. – Mayo 2025.

Considere el siguiente problema de optimización en variables entera-mixta:

$$
\begin{array}{lll}
P) & \text{Max} & f(\mathbf{x}) + a^T \mathbf{y} \\
 & \text{s.a.} & A\mathbf{x} = b \\
 & & h_\ell(\mathbf{x}) \leq d \qquad \ell = 1,\ldots,r \\
 & & B\mathbf{x} + D\mathbf{y} = e \\
 & & \mathbf{x} \geq 0 \text{ (entero)}, \ \mathbf{y} \geq 0,
\end{array}
$$

Donde las funciones f y h_ℓ son funciones convexas en $\Re^n$ y los respectivos vectores a,b,d,e y matrices A, B y D tienen las dimensiones apropiadas y son de rango máximo. Suponga que usted tiene acceso a una subrutina que resuelve de manera muy eficiente problemas con la siguiente estructura:

$$
\begin{array}{lll}
PA) & \text{Max} & a^T \mathbf{y} \\
 & \text{s.a.} & D\mathbf{y} = v, \\
 & & \mathbf{y} \geq 0,
\end{array}
$$

para un vector v ante los cuales el problema siempre tiene solución óptima. Deduzca un esquema de descomposición para el problema original que tome en cuenta este antecedente. Detalle toda la deducción de su propuesta explicitando el Problema Maestro, el Suproblema y el criterio de detención del método. Por último, ¿qué ocurre en su esquema de descomposición si PA) es un problema infactible para algunos valores del vector v?

La actividad puede ser desarrollada en grupos de hasta 2 alumnos y su plazo de entrega vence el miércoles 21 de mayo. La actividad se puede entregar en clases o reportar a través de la página del curso en EVA (sin duplicarle) mediante un archivo en pdf.

RESPUESTA

El problema dado podría ser formulado equivalentemente como:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & f(\mathbf{x}) \;+\; \text{Max}\ \{ a^T\mathbf{y} \ / \ D\mathbf{y} = e - B\mathbf{x},\ \mathbf{y}\geq 0 \} \\ \text{s.a.} & A\mathbf{x} = b \\ & h_\ell(\mathbf{x}) \leq d \qquad \ell=1,\ldots,r \\ & \mathbf{x}\geq 0, \text{ entero.} \end{array}$$

Asumiendo que Max{ $d^T\mathbf{y}$ / $D\mathbf{y} = e-A\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\geq 0$} siempre tiene solución óptima para cualquier valor de $v=e-B\mathbf{x}$. Por dualidad en P.L. el problema también es equivalente a resolver:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & f(\mathbf{x}) \;+\; \text{Min}\ \{ (e-B\mathbf{x})^T\boldsymbol{\lambda} \ / \ D^T\boldsymbol{\lambda} \geq a \} \\ \text{s.a.} & A\mathbf{x} = b \\ & h_\ell(\mathbf{x}) \leq d \qquad \ell=1,\ldots,r \\ & \mathbf{x}\geq 0, \text{ entero.} \end{array}$$

Denotamos por $\boldsymbol{\lambda}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{\lambda}^{(N)}$ los vértices o puntos extremos del poliedro { $\boldsymbol{\lambda}$ / $D^T\boldsymbol{\lambda} \geq a$}, con lo cual el problema original también es equivalente a resolver:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & f(\mathbf{x}) \;+\; \min\ \{ (e-B\mathbf{x})^T\boldsymbol{\lambda}^{(1)}, (e-B\mathbf{x})^T\boldsymbol{\lambda}^{(2)},\ldots, (e-B\mathbf{x})^T\boldsymbol{\lambda}^{(N)} \} \\ \text{s.a.} & A\mathbf{x} = b \\ & h_\ell(\mathbf{x}) \leq d \qquad \ell=1,\ldots,r \\ & \mathbf{x}\geq 0, \text{ entero.} \end{array}$$

O bien equivalente al siguiente **Problema Maestro**:

$$\begin{array}{lll} \text{(PM)}\ \ \text{Max} & f(\mathbf{x}) \;+\; z & \\ \text{s.a.} & A\mathbf{x} = b & \\ & h_\ell(\mathbf{x}) \leq d & \ell=1,\ldots,r \\ & \mathbf{z} \leq (e-B\mathbf{x})^T\boldsymbol{\lambda}^{(i)} & i=1,\ldots,N \\ & \mathbf{x}\geq 0, \text{ entero.} & \end{array}$$

(25 puntos)

En la **k**-ésima iteración, el método considera un **PM Reducido** con una parte de las N restricciones de optimalidad:

$$\begin{array}{lll} \text{(PMR)}\ \ \text{Max} & f(\mathbf{x}) + z & \\ \text{s.a.} & A\mathbf{x} = b & \\ & h_\ell(\mathbf{x}) \leq d & \ell=1,\ldots,r \\ & \mathbf{z} \leq (e-B\mathbf{x})^T\boldsymbol{\lambda}^{(i)} & i=1,\ldots,\mathbf{k}-1 \\ & \mathbf{x}\geq 0, \text{entero.} & \end{array}$$

Denotando por $(\mathbf{x}^\mathbf{k},\mathbf{z}^\mathbf{k})$ la solución óptima de (PMR), esta también será óptima para (PM) en la medida que cumpla con:

$$z^\mathbf{k} \leq (e-B\mathbf{x}^\mathbf{k})^T\boldsymbol{\lambda}^{(i)} \text{ para todo } i=1,\ldots,N \qquad (*)$$

Lo anterior es posible de verificar resolviendo el siguiente **Subproblema** (dual):

$$\begin{array}{ll} \text{(SP)}\ \ \text{Min} & (e-B\mathbf{x}^\mathbf{k})^T\boldsymbol{\lambda} \\ \text{s.a.} & D^T\boldsymbol{\lambda} \geq a \quad (\mathbf{y}) \end{array}$$

(25 puntos)

o de manera alternativa resolviendo el siguiente **Subproblema** (primal), *que se sabe resolver de manera muy eficiente* según el enunciado del ejercicio:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(SP')} & \text{Min} & a^T \mathbf{y} \\
& \text{s.a.} & D\mathbf{y} = e - B\mathbf{x}^{\mathbf{k}} \quad (\lambda) \\
& & \mathbf{y} \geq 0
\end{array}
$$

Si $\boldsymbol{\lambda}^{(\mathbf{k})}$ es la solución óptima de (SP), o las variables duales óptimas o precios sombra de (SP'), la condición (*) es equivalente a verificar que se cumpla:

$$z^{\mathbf{k}} \leq (e - B\mathbf{x}^{\mathbf{k}})^T \boldsymbol{\lambda}^{(\mathbf{k})}$$ **(20 puntos)**

Alternativamente, se puede verificar que el gap de optimalidad sea nulo o suficientemente pequeño, el cual corresponde a la diferencia entre la cota superior e inferior de (PM):

$$v(\text{PMR}) - [\, f(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}) + v(\mathbf{SP'})\,] = \mathbf{z}^{(\mathbf{k})} - v(\mathbf{SP'}) \leq \text{tolerancia\_dada}$$

y el algoritmo termina con $(\mathbf{x}^{\mathbf{k}},\mathbf{z}^{\mathbf{k}})$ como solución óptima del (PM).

En caso que esto no se cumpla, se agrega al Problema Maestro la (nueva) restricción:

$$z \leq (e - B\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}^{(\mathbf{k})}$$ **(10 puntos)**

Ahora bien, si el problema Max$\{ a^T\mathbf{y} \,/\, D\mathbf{y} = e-B\mathbf{x},\ \mathbf{y}\geq 0\}$ no siempre tiene solución óptima para un $v = e-B\mathbf{x}$ cualquiera, es necesario considerar las restricciones de factibilidad en el Problema Maestro, las cuales corresponden a:

$$\mathbf{0} \leq (e-B\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}^{(N+j)} \qquad j=1,\ldots,M$$

Donde $\boldsymbol{\lambda}^{(N+1)},\ldots,\boldsymbol{\lambda}^{(N+M)}$ representan las M direcciones extremas del poliedro $\{ \boldsymbol{\lambda} \,/\, D^T\boldsymbol{\lambda} \geq a\}$, dando origen al siguiente **Problema Maestro**:

$$
\begin{array}{llll}
\text{(PM)} & \text{Max} & f(\mathbf{x}) + z & \\
& \text{s.a.} & A\mathbf{x} = b & \\
& & h_\ell(\mathbf{x}) \leq d & \ell=1,\ldots,r \\
& & \mathbf{z} \leq (e-B\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}^{(i)} & i=1,\ldots,N \\
& & \mathbf{0} \leq (e-B\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}^{(N+j)} & j=1,\ldots,M \\
& & \mathbf{x} \geq 0, \text{ entero.} &
\end{array}
$$ **(20 puntos)**

Así el Método de Benders va agregando al Maestro Reducido no solo las restricciones de optimalidad ya descritas anteriormente, sino que cuando al resolver el Subproblema (dual) este resulta no-acotado se puede obtener una dirección extrema del poliedro $\{ \boldsymbol{\lambda} \,/\, D^T\boldsymbol{\lambda} \geq a\}$. En resumen, al Maestro Reducido se agrega una nueva restricción: $\mathbf{z} \leq (e-B\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}^{(\mathbf{k})}$, cuando el supbroblema (primal o dual) tiene solución óptima y $\boldsymbol{\lambda}^{(\mathbf{k})}$ es un vértice del poliedro del subproblema dual, o bien se agrega una restricción de factibilidad: $\mathbf{0} \leq (e-B\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}^{(\mathbf{k})}$, cuando el supbroblema dual es no acotado y $\boldsymbol{\lambda}^{(\mathbf{k})}$ es una dirección extrema del poliedro del subproblema dual en la k-ésima iteración del método.