

PRIMER PARCIAL: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA: SOLUCIÓN

Ejercicio 1

Sabemos que $P(> 0/E) = 0.98$, $P(> 0/S) = 0.03$, $P(E/> 0) = 0.89$.

Le llamamos $p = P(E)$. Entonces la condición (iii) significa que

$$P(E/> 0) = \frac{P(E \cap \{> 0\})}{P(> 0)} = \frac{0.98p}{0.98p + 0.03(1-p)} = 0.89$$

despejando p obtenemos: $p = 0.19851$.

Ejercicio 2

Los casos posibles son 5^3 .

Los casos favorables los separamos en 3 casos:

- los que se repite la misma letra las 5 veces que son 5 casos, por ejemplo (aaaaa).
- Los casos en los que se repite una vocal 4 veces y la otra es distinta, por ejemplo (aaaa-), (aaa-a), (aa-aa), (a-aaa), (-aaaa), aquí tenemos 5 casos a los que hay que multiplicar por 4 (por la otra letra) y luego volver a multiplicar por 5 (cambiar la a por las otras 4 letras), son entonces $5 \times 4 \times 5 = 100$.
- Los casos en los que se repite una vocal 3 veces, por ejemplo (aaa-). En este caso son $\binom{5}{3} \times 4 \times 4 \times 5 = 800$ casos.

Entonces la probabilidad de que una letra se repita al menos 3 veces es

$$\frac{5 + 100 + 800}{5^5} = \frac{181}{625} = 0.2896.$$

Ejercicio 3

Para calcular la probabilidad de ganar con el juego 1, definimos X = cantidad de veces que sale el 4 entre las 5 tiradas del dado $\sim \text{Bin}(n=5, p=1/6)$ (éxito es que salga el 4 en una tirada del dado). Sabemos que $P(X=x) = \binom{5}{x} (1/6)^x (5/6)^{5-x}$ para $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Entonces la probabilidad de ganar con el juego 1 es $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - (5/6)^5 - 5 \times (1/6) (5/6)^4 = \frac{763}{3888} = 0.19624$.

Para calcular la probabilidad de ganar con el juego 2 definimos X = cantidad de caras entre las 8 tiradas de la moneda $\sim \text{Bin}(n = 8, p = 1/2)$ (éxito es que salga el 4 en una tirada del dado). Sabemos que $P(X = x) = \binom{8}{x} (1/2)^8$ para $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Entonces la probabilidad de ganar con el juego 2 es

$$P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \frac{\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3}}{2^8} = \frac{1 + 8 + 28 + 56}{2^8} = \frac{93}{256} = 0.36328.$$

Entonces es más conveniente el juego 2 porque tiene mayor probabilidad de ganar.

Ejercicio 4

En esta resolución le llamaremos A a acertar el disparo.

$P(X = 20.000) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ (deben darse $(AAAAAA)$ ya todas aciertan sus dos disparos y son todos independientes con probabilidad $1/2$ cada uno).

La probabilidad de que por ejemplo Paula y Daniela aciertan sus dos disparos pero Emilia no acierta sus dos disparos es $P(AA)P(AA)(1 - P(AA)) = \frac{1}{4} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{64}$

$P(X = 10.000) = 3 \times \frac{3}{64} = \frac{9}{64}$. La probabilidad de que Paula acierte sus dos disparos Daniela no y Emilia no es $P(AA)(1 - P(AA))^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$.

Entonces $P(X = 5.000) = 3 \times \frac{9}{64} = \frac{27}{64}$.

La probabilidad de que ninguna de las tres acierte sus dos disparos es $(1 - P(AA))^3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$.

$$\text{Entonces } p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} 27/64 & \text{si } x = 0 \\ 27/64 & \text{si } x = 5.000 \\ 9/64 & \text{si } x = 10.000 \\ 1/64 & \text{si } x = 20.000 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

NOTA: Otra forma de hacer este ejercicio es definir Y = cantidad de chicas (entre Paula, Emilia y Daniela) aciertan sus dos disparos en 2 tiradas, entonces $Y \sim \text{Bin}(n = 3, p = 1/4)$, entonces $p_Y(y) = \binom{3}{y} (1/4)^y (3/4)^{3-y}$ para $y = 0, 1, 2, 3$. Entonces resta observar que $\{X = 20.000\} = \{Y = 3\}$, $\{X = 10.000\} = \{Y = 2\}$, $\{X = 5.000\} = \{Y = 1\}$, $\{X = 0\} = \{Y = 0\}$.

Ejercicio 5

Comenzamos observando que

$$P(Z \leq z/A) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 1 \\ \frac{z-1}{3} & \text{si } 1 \leq z \leq 4 \\ 1 & \text{si } z > 4 \end{cases} \text{ y que } P(Z \leq z/B) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ 1 - e^{-z/10} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}.$$

Entonces (se puede visualizar la siguiente igualdad mediante un árbol)

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Z \leq z/A)P(A) + P(Z \leq z/B)P(B) = 0.6P(Z \leq z/A) + 0.4P(Z \leq z/B) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 0.4(1 - e^{-z/10}) & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 0.6\frac{z-1}{3} + 0.4(1 - e^{-z/10}) & \text{si } 1 \leq z \leq 4 \\ 0.6 + 0.4(1 - e^{-z/10}) & \text{si } 4 \leq z \end{cases}.$$

Ejercicio 6

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ tenemos que $0.9 = 0.7 + 0.6 + 0.5 - 0.45 - 0.35 - 0.25 + P(A \cap B \cap C)$ de donde deducimos que $P(A \cap B \cap C) = 0.15$.

Si le llamamos D al suceso de que ocurren exactamente 2 de los 3 sucesos

Entonces la probabilidad de que ocurran exactamente 2 de los 3 sucesos es

$$P(D) = P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) =$$

$$(P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)) + (P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)) + (P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)) = 0.6.$$

Entonces, la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ocurrieron exactamente 2 de los 3 sucesos es

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C)}{P(D)} = \frac{0.5}{0.6} = \frac{5}{6}.$$

Ejercicio 7

El suceso $\{X = 5\}$ significa que se realizaron 5 extracciones de forma que las dos últimas son blancas, la tercera debe ser negra (porque de lo contrario el experimento terminaría antes de la quinta extracción) y las dos primeras pueden ser tanto blancas como negras con la condición de que no aparezcan dos blancas seguidas antes de la quinta extracción. Entonces el suceso $\{X = 5\}$ lo descomponemos como la unión disjunta de los casos $(nnnbb)$, $(nbnbb)$ y $(bnnbb)$. Utilizando la independencia de las extracciones tenemos que

$$P(X = 5) = \frac{N^3 B^2 + 2N^2 B^3}{(B + N)^5} = \frac{N^2 B^2 (N + 2B)}{(B + N)^5}.$$

Ejercicio 8

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^1 k e^{x-1} dx + \int_1^{+\infty} k e^{1-x} dx = \dots = 2k = 1 \text{ por lo que } k = 1/2.$$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = \begin{cases} (1/2) \int_{-\infty}^x e^{x-1} dx & \text{si } x \leq 1 \\ (1/2) \int_{-\infty}^1 e^{x-1} dx + (1/2) \int_1^x e^{1-x} dx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ luego de primitivizar y evaluar mediante la regla de Barrow llegamos a que

$$F_X(x) = \begin{cases} e^{x-1}/2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - e^{1-x}/2 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$