Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables.**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Abril 2025.**

PRIMER PARCIAL – MARTES 29 DE ABRIL DE 2025.

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del parcial es de tres horas y media.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- Hay 5 ejercicios de múltiple opción de 5 puntos cada uno y 3 ejercicios de desarrollo. El parcial es de 40 puntos en total.
- Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único que se tenga en cuenta a la hora de corregir.
- Cada respuesta incorrecta en los ejercicios de múltiple opción resta 1 punto. Preguntas sin contestar suman 0 puntos. En cada ejercicio de múltiple opción hay una sola opción correcta.

EJERCICIOS DE MÚLTIPLE OPCIÓN
5 ejercicios, 25 puntos totales.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
A	C	B	D	B

EJERCICIOS DE DESARROLLO
2 ejercicios, 15 puntos totales.

SOLO PARA USO DOCENTE

Ejercicio 1a	Ejercicio 1b	Ejercicio 1c	Ejercicio 2

Ejercicio 1. Considere la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 4y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Entonces $y(\frac{\pi}{2})$ vale

A) $\frac{1}{5}(1 + e^{\frac{\pi}{2}})$.

B) $\frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$.

C) $\frac{1}{5} + e^{\frac{\pi}{2}}$.

D) $e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{5}$.

Solución: El polinomio asociado a la ecuación homogénea es $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$. Como las raíces de p son $\pm 2i$, obtenemos que la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_H = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

Por otro lado, una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$y_P = \frac{1}{5}e^x$$

Luego la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{5}e^x$$

La condición inicial $y(0) = 0$ implica que $A + \frac{1}{5} = 0$, es decir que $A = -\frac{1}{5}$, y la condición inicial $y'(0) = 0$ implica que $2B + \frac{1}{5} = 0$, es decir que $B = -\frac{1}{10}$. Por lo tanto la solución de la ecuación es

$$y = -\frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x) + \frac{1}{5}e^x$$

Entonces, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{5}(1 + e^{\frac{\pi}{2}})$.

Ejercicio 2. Sea $X \subseteq \mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos que verifican:

$$\begin{cases} |z| = \mathrm{Re}(z) \\ z^2 = \overline{z} \end{cases}$$

Entonces:

A) X contiene un único elemento.

B) El producto de todos los elementos de X es igual a 1.

C) X contiene exactamente dos elementos, ambos ubicados sobre el eje real.

D) La suma de todos los elementos de X es igual a 0.

Solución: El conjunto de números complejos que satisfacen la ecuación $z^2 = \overline{z}$ es

$$\{0, 1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}$$

(ver Ejemplo 1.20 de las notas del curso).

Por otro lado, la condición $|z| = \mathrm{Re}(z)$ implica que z debe ser un número real, ya que:

$$|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = \mathrm{Re}(z)^2 \Rightarrow \mathrm{Im}(z)^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(z) = 0.$$

Es decir, z es real. Por lo tanto,

$$X = \{0, 1\}.$$

La respuesta correcta es: X contiene exactamente dos elementos, ambos ubicados sobre el eje real.

Ejercicio 3. Considere las siguientes afirmaciones sobre sucesiones de números reales:

I. Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, entonces toda subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

II. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión cuyos términos pertenecen al intervalo $[0,1]$, entonces posee al menos una subsucesión convergente a un valor de $[0,1]$.

III. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

no es convergente, pero la subsucesión de los términos pares (a_{2n}) converge a $\frac{1}{2}$.

IV. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si y solo si convergen las siguientes tres subsucesiones:

$$(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$$

Entonces:

A) Solamente las afirmaciones II y III son verdaderas.

B) Solamente las afirmaciones II y IV son verdaderas.

C) Solamente las afirmaciones I y IV son verdaderas.

D) Solamente las afirmaciones II, III y IV son verdaderas.

Solución:

La afirmación I es falsa. Consideremos, por ejemplo, la sucesión acotada $a_n = (-1)^n$, que toma valores alternados entre 1 y -1. Sin embargo, esta sucesión no converge, y algunas de sus subsucesiones, como $a_{3n} = (-1)^{3n}$, tampoco convergen.

La afirmación II es verdadera. Por el Teorema 3.26 de las notas, toda sucesión acotada tiene una subsucesion convergente. Es facil ver que el valor de convergencia debe estar en el intervalo $[0,1]$.

La afirmación III es falsa. Ver ejercicio 5 parte g del práctico 3.

La afirmación IV es verdadera. Ver ejercicio 7 del practico 3 y Teorema 3.21 de las notas del curso .

Por lo tanto, la opcion correcta es: Solamente las afirmaciones II y IV son verdaderas.

Ejercicio 4. Sea $a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ y defina $s = a + \frac{5}{4}$. Entonces:

A) Ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^s}$ convergen.

B) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^s}$ no converge.

C) Ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^s}$ no convergen.

D) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ diverge y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^s}$ converge.

Solución: $a = \frac{3}{4} < 1$, por lo tanto $s = a + \frac{5}{4} = 2$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ diverge, ya que $a < 1$ (ver Ejemplo 3.39 de las notas del curso). En cambio, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^s}$, con $s = 2$, converge (ver Ejemplo 3.48 de las notas del curso).

Ejercicio 5. Sea $k > 0$ y considere la integral

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2 + 2k} - \frac{k}{x+1} \right) dx$$

Entonces:

A) La integral converge para infinitos valores de k.

B) La integral converge para un único valor de k.

C) La integral diverge para un único valor de k.

D) La integral diverge para todo k.

Solución: La integral converge para un único valor de k, ver solución del ejercicio 3 del practico 5.

EJERCICIOS DE DESARROLLO
3 ejercicios, 15 puntos totales.

Ejercicio 1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de numeros reales.

a) (2 pts) Decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada inferiormente si:

existe un número real k tal que $k \leq a_n$ para todo $n \geq 0$.

b) (2 pts) Decimos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente si:

$a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \geq 0$.

c) (6 pts) Probar que toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.

Sabemos que el conjunto no vacío y acotado inferiormente $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ posee un **ínfimo**, que denotamos por:

$$L = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Queremos demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de ínfimo, el número $L + \varepsilon$ no puede ser una cota inferior del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, lo cual implica que existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a_{n_0} < L + \varepsilon.$$

Como la sucesión (a_n) es monótona decreciente, se cumple que para todo $n \geq n_0$:

$$a_n \leq a_{n_0} < L + \varepsilon.$$

Además, como L es una cota inferior de la sucesión, tenemos:

$$a_n \geq L \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, para todo $n \geq n_0$ se cumple:

$$L \leq a_n < L + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon.$$

Esto prueba que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Ejercicio 2 (5 pts.) Clasifique la siguiente serie, justificando:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$$

Sea $a_n = \frac{n^3}{e^n}$ Tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}} \frac{e^n}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \\
&= \frac{1}{e} < 1
\end{aligned}$$

Entonces por el criterio del cociente, se obtiene que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$ converge.