

PRIMER PARCIAL DE CDIV - PRIMER SEMESTRE 2025 - VERSIÓN 3

MARTES 29 DE ABRIL DE 2025

Nro de lista	Cédula	Apellido y nombre	Firma

- El puntaje total es 40 puntos.
- La duración del parcial es de 3 horas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- **Se debe entregar la hoja de escáner y las hojas de la propuesta con todos los campos completos.**
- Al completar los campos en la hoja de escáner, pintar (con lapicera) correctamente dentro de los círculos.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Respuestas

Puntajes: 5 puntos si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E ó F** según corresponda.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8
B	E	F	D	A	F	A	E

Notación:

En el parcial se usa la siguiente notación:

- $E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$ denota el entorno real de centro a y radio r .
- $E^*(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < r\}$ denota el entorno reducido real de centro a y radio r .
- $S^*(f, P)$ denota la suma superior de f con respecto a la partición P .
- $S_*(f, P)$ denota la suma inferior de f con respecto a la partición P .

página en blanco

Ejercicio 1

Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 \leq 2\}$.

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- A) $\sqrt{2}$ es el máximo de A , A tiene supremo y 0 es el mínimo de A .
 - B) A no tiene máximo, el supremo de A vale $\sqrt{2}$ y 0 es el mínimo de A .
 - C) A no tiene ni máximo ni supremo y 0 es el mínimo de A .
 - D) A no tiene ni máximo, ni supremo, ni mínimo.
 - E) $\sqrt{2}$ es el máximo de A , el supremo de A vale $\sqrt{2}$ y A no tiene mínimo.
 - F) 2 es el máximo de A , el supremo de A vale 2 y 0 es el mínimo de A .
-

Ejercicio 2

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables de las cuales se sabe:

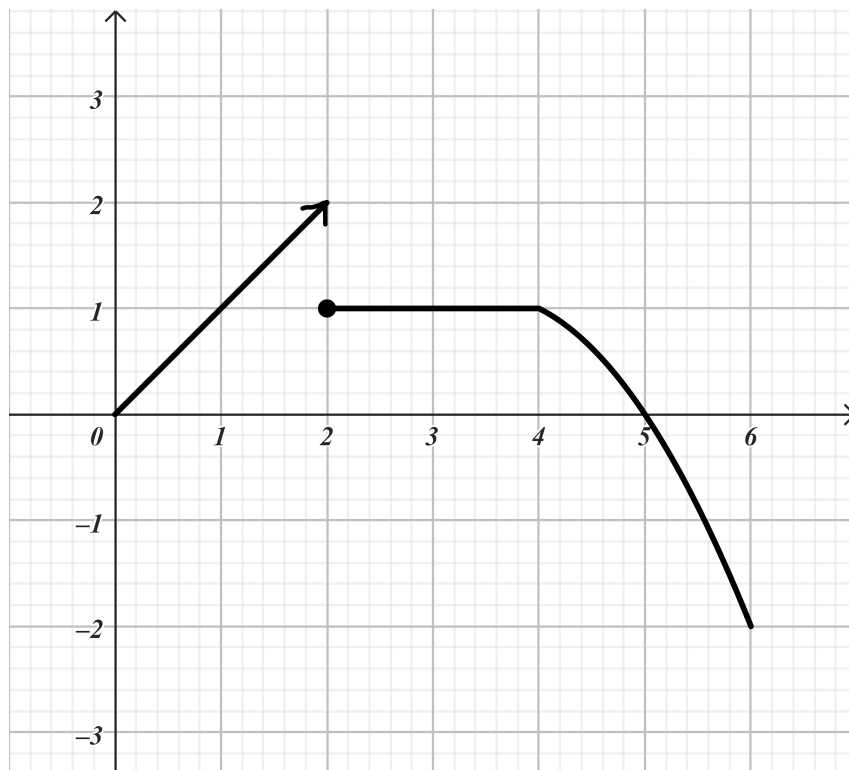
$$\int_2^8 2f(x)dx = 6; \quad \int_4^8 (f(x) + g(x)) dx = 4; \quad \int_2^4 f(x)dx = 1$$

Indicar el valor de $\int_4^8 3g(x)dx$

- | | | |
|-------|------|-------|
| A) -6 | C) 1 | E) 6 |
| B) -1 | D) 2 | F) -3 |
-

Ejercicio 3

Sea $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ la función cuyo bosquejo se muestra en la siguiente figura.



Para la partición $P = \{0, 1, 2, 4, 6\}$ del intervalo $[0, 6]$ el valor de $S^*(f, P)$ es:

- | | | |
|-------|------|------|
| A) -2 | C) 6 | E) 1 |
| B) -1 | D) 5 | F) 7 |

Ejercicio 4

Consideremos la función $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2 + 1$ y la partición $P_n = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ del intervalo $[1, 2]$ que divide al intervalo $[1, 2]$ en n intervalos de igual longitud.

Indicar el mínimo valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) < \frac{1}{3}$.

Sugerencia: Observar que f es monótona creciente en el intervalo $[1, 2]$.

- | | | |
|------------|-------------|------------|
| A) $n = 7$ | C) $n = 9$ | E) $n = 6$ |
| B) $n = 8$ | D) $n = 10$ | F) $n = 5$ |

Ejercicio 5

Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x \neq 1, 2; \\ 0, & \text{si } x = 1; \\ 1, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- A) f es integrable en $[0, 2]$, no existe P partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 3$ y existe Q partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 0$.
 - B) f es integrable en $[0, 2]$, existe P partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 3$ y existe Q partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 0$.
 - C) f es integrable en $[0, 2]$, existe P partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 3$ y no existe Q partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 0$.
 - D) f no es integrable en $[0, 2]$, existe P partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 3$ y existe Q partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 0$.
 - E) f no es integrable en $[0, 2]$, no existe P partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 3$ y existe Q partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 0$.
 - F) f no es integrable en $[0, 2]$, no existe P partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 3$ y no existe Q partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 0$.
-

Ejercicio 6

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Entonces, el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| A) existe y es igual a $-\infty$ | D) existe y es igual a 1 |
| B) no existe | E) existe y es igual a $+\infty$ |
| C) existe y es igual a $\frac{1}{2}$ | F) existe y es igual a 0 |
-

Ejercicio 7

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2x$. Sabemos que la función tiene límite en $x = 2$ y vale 4, es decir que se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

Si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ sabemos que

existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in E^*(2, \delta)$ se cumple que $f(x) \in E(f(2), \varepsilon)$.

Indicar el *máximo* valor de δ que cumple con lo que dice el recuadro.

A) $\delta = \frac{1}{4}$
B) $\delta = \frac{1}{6}$

C) $\delta = \frac{1}{3}$
D) $\delta = \frac{1}{5}$

E) $\delta = \frac{2}{3}$
F) $\delta = \frac{1}{2}$

Ejercicio 8

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} (x-2) \cos\left(\frac{x}{x-2}\right) + a \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right), & \text{si } x \neq 2, \\ (x+2)^2, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Indicar la opción correcta.

- A) No existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f sea una función continua.
B) f es continua si $a = 2$.
C) f es continua si $a = -4$.
D) f es continua si $a = -2$.
E) f es continua si $a = 4$.
F) f es continua para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.
-