PRIMER PARCIAL DE CDIV - PRIMER SEMESTRE 2025 - VERSIÓN 2

MARTES **29** DE ABRIL DE 2025

| Nro de lista | Cédula | Apellido y nombre | Firma |
|---|---|---|---|
| | | | |

- El puntaje total es 40 puntos.
- La duración del parcial es de 3 horas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- **Se debe entregar la hoja de escáner y las hojas de la propuesta con todos los campos completos.**
- Al completar los campos en la hoja de escáner, pintar (con lapicera) correctamente dentro de los círculos.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

**Respuestas**

Puntajes: 5 puntos si la respuesta es correcta, $-1$ punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E ó F** según corresponda.

| Ej 1 | Ej 2 | Ej 3 | Ej 4 | Ej 5 | Ej 6 | Ej 7 | Ej 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | F | A | E | B | A | B | F |

---

**Notación:**

En el parcial se usa la siguiente notación:

- $E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$ denota el entorno real de centro $a$ y radio $r$.
- $E^*(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < r\}$ denota el entorno reducido real de centro $a$ y radio $r$.
- $S^*(f, P)$ denota la suma superior de $f$ con respecto a la partición $P$.
- $S_*(f, P)$ denota la suma inferior de $f$ con respecto a la partición $P$.

página en blanco

## Ejercicio 1

Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 \leq 2\}$.

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A) $\sqrt{2}$ es el máximo de $A$, $A$ tiene supremo y 0 es el mínimo de $A$.
B) $A$ no tiene ni máximo ni supremo y 0 es el mínimo de $A$.
C) $A$ no tiene máximo, el supremo de $A$ vale $\sqrt{2}$ y 0 es el mínimo de $A$.
D) $A$ no tiene ni máximo, ni supremo, ni mínimo.
E) $\sqrt{2}$ es el máximo de $A$, el supremo de $A$ vale $\sqrt{2}$ y $A$ no tiene mínimo.
F) 2 es el máximo de $A$, el supremo de $A$ vale 2 y 0 es el mínimo de $A$.

---

## Ejercicio 2

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables de las cuales se sabe:

$$\int_2^8 2f(x)\mathrm{d}x = 6; \qquad \int_4^8 \left(f(x) + g(x)\right)\mathrm{d}x = 4; \qquad \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 1$$

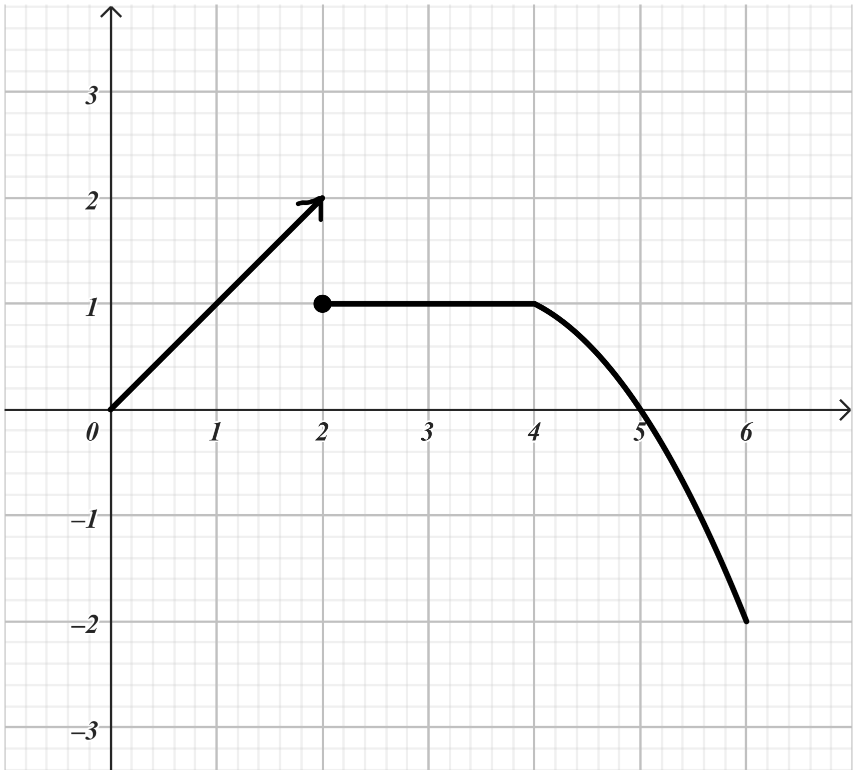
Indicar el valor de $\displaystyle\int_4^8 3g(x)\mathrm{d}x$

A) $-6$
B) $-1$
C) $1$
D) $2$
E) $-3$
F) $6$

---

## Ejercicio 3

Sea $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ la función cuyo bosquejo se muestra en la siguiente figura.




Para la partición $P = \{0, 1, 2, 4, 6\}$ del intervalo $[0, 6]$ el valor de $S^*(f, P)$ es:

A) 7
B) $-1$
C) 6
D) 5
E) 1
F) $-2$

---

## Ejercicio 4

Consideremos la función $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2 + 1$ y la partición $P_n = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ del intervalo $[1, 2]$ que divide al intervalo $[1, 2]$ en $n$ intervalos de igual longitud.

Indicar el mínimo valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) < \frac{1}{3}$.

*Sugerencia:* Observar que $f$ es monótona creciente en el intervalo $[1, 2]$.

A) $n = 7$
B) $n = 8$
C) $n = 9$
D) $n = 6$
E) $n = 10$
F) $n = 5$

---

## Ejercicio 5

Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x \neq 1, 2; \\ 0, & \text{si } x = 1; \\ 1, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A) $f$ es integrable en $[0, 2]$, existe $P$ partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 3$ y existe $Q$ partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 0$.
B) $f$ es integrable en $[0, 2]$, no existe $P$ partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 3$ y existe $Q$ partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 0$.
C) $f$ es integrable en $[0, 2]$, existe $P$ partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 3$ y no existe $Q$ partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 0$.
D) $f$ no es integrable en $[0, 2]$, existe $P$ partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 3$ y existe $Q$ partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 0$.
E) $f$ no es integrable en $[0, 2]$, no existe $P$ partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 3$ y existe $Q$ partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 0$.
F) $f$ no es integrable en $[0, 2]$, no existe $P$ partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 3$ y no existe $Q$ partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 0$.

---

## Ejercicio 6

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Entonces, el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$

A) existe y es igual a 0
B) no existe
C) existe y es igual a $\frac{1}{2}$
D) existe y es igual a 1
E) existe y es igual a $+\infty$
F) existe y es igual a $-\infty$

---

## Ejercicio 7

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2x$. Sabemos que la función tiene límite en $x = 2$ y vale 4, es decir que se cumple que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ sabemos que

$$\boxed{\text{existe un } \delta > 0 \text{ tal que para todo } x \in E^*(2, \delta) \text{ se cumple que } f(x) \in E(f(2), \varepsilon).}$$

Indicar el *máximo* valor de $\delta$ que cumple con lo que dice el recuadro.

A) $\delta = \frac{1}{6}$
B) $\delta = \frac{1}{4}$
C) $\delta = \frac{1}{3}$
D) $\delta = \frac{1}{5}$
E) $\delta = \frac{2}{3}$
F) $\delta = \frac{1}{2}$

---

## Ejercicio 8

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\cos\left(\frac{x}{x-2}\right) + a\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right), & \text{si } x \neq 2, \\ (x+2)^2, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Indicar la opción correcta.

A) No existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f$ sea una función continua.
B) $f$ es continua si $a = 2$.
C) $f$ es continua si $a = -4$.
D) $f$ es continua si $a = -2$.
E) $f$ es continua para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.
F) $f$ es continua si $a = 4$.

---