

$$MP_{PR} \Rightarrow \neg \neg \exists y T(x, x, y) \rightarrow \exists y T(x, x, y)$$

$$\Leftrightarrow \neg \forall y \neg T(x, x, y) \rightarrow \exists y T(x, x, y)$$

$$(\forall y. \neg T(x, x, y)) \rightarrow \perp$$

type: $0 \rightarrow 0$ type 0

$$\text{type } (0 \rightarrow 0) \rightarrow 0$$

$$d := (\lambda x^{0 \rightarrow 0}. 0^0)^{(0 \rightarrow 0) \rightarrow 0} = 0^{(0 \rightarrow 0) \rightarrow 0}$$

Lemma $HA^\omega \vdash \neg \forall y \neg T(x, x, y) \rightarrow \forall r. \neg r \text{ rm } \forall y \neg T(x, x, y)$

Dem: Supongamos $r \text{ rm } \forall y \neg T(x, x, y)$. Entonces.

$$\forall y \ r(y) \text{ rm } \underbrace{\neg T(x, x, y)}_{\text{atómica (prim rec)}} \Leftrightarrow$$

$$\forall y \neg T(x, x, y)$$

Pero, por hipótesis vale $\neg \forall y \neg T(x, x, y)$ } $\Rightarrow \perp$

entonces probamos $HA^\omega \vdash \neg \forall y \neg T(\) \vdash \neg r \text{ rm } \forall y \neg T(\)$

$$\vdash \forall r. \neg r \text{ rm } \forall y \neg T(\)$$

Entonces: $\forall x^{(0 \rightarrow 0) \rightarrow 0}$

$$x \text{ rm } \forall y \neg T(\) \rightarrow \perp$$

~~no tiene realizadores.~~

$$\forall r. r \text{ rm } \forall y \neg T(\) \rightarrow x(r) \text{ rm } \perp$$

E. part. $HA^\omega \vdash \neg \forall y \neg T(x, x, y) \vdash d \text{ rm } \neg \forall y \neg T(x, x, y)$

$$\vdash \underbrace{d}_{ii} \text{ rm } \exists y T(x, x, y)$$

$$\vdash \pi^1(u) \text{ rm } T(x, x, \underbrace{\pi^2(u)}_{\tilde{t}(x)})$$

$$\vdash T(x, x, \tilde{t}(x))$$

$\{x\}(x) \downarrow \leftrightarrow x \in K$
que es decidible

$(MP)_{PR}$

Buscamos $\tilde{t}(x)$ tal que.

$$\forall x. \neg \forall y \neg T(x, x, y) \leftrightarrow T(x, x, \tilde{t}(x))$$

decidible

obvio

! si vale $T(x, x, \tilde{t}(x))$
entonces $\exists y T(x, x, y)$ y
entonces $\neg \forall y \neg T(x, x, y)$

formula atómica

prim rec

Λ_c cálculo definiciones
mutuamente
recursivas Π pila (stacks)

$\Lambda_c^0 * \Pi$

↑ ↑

programa entorno
prueba contraprueba

constante especial

para cada pila
hay 1 constante.

$T, U ::= x \mid \lambda x. T \mid TU \mid \textcircled{CC} \mid \textcircled{K_\Pi}$

↑
variable

← k

$\Pi ::= \alpha \mid T_0 \cdot \Pi$ T_0 término cerrado

↑
constantes
de pila (pila vacía)

$\Pi = T_0 \dots T_k \cdot \alpha$ para $T_0, \dots, T_k$ cerrados
y α constante de pila

Procesos: (T, Π) Notación: $T * \Pi$

par ordenado donde T es cerrado y Π es una pila.

La KAM viene dada por los procesos y 4 reglas de reducción:

←
Krivine
Abstract
Machine

$TU * \Pi \succ_1 T * U, \Pi$
 $\lambda x. T * U, \Pi \succ_1 T\{U/x\} * \Pi$
 $CC * T, \Pi \succ_1 T * K_\Pi \cdot \Pi$
 $K_\Pi * T, \Pi' \succ_1 T * \Pi$

$\perp$ polo. $\perp \subseteq \Lambda_c^0 * \Pi$ que es saturado resp. a $\succ^*$

$T * \Pi \succ^* U * \Pi' \in \perp \Rightarrow T * \Pi \in \perp$

Sea $\mathcal{Q} \subseteq \Pi$. Entonces $\mathcal{Q}^\perp := \{T \in \Lambda_c^0 \mid \forall \Pi \in \mathcal{Q} \ T * \Pi \in \perp\}$

↓
 $T \perp \Pi$

$$\mathcal{P}(\Pi) \xrightarrow{(\cdot)^\perp} \mathcal{P}(\Pi^0) \quad \text{Im}((\cdot)^\perp) = \text{Truth values.}$$

PA^2 Es aritmética clásica de 2º orden:

Lenguaje: $x, y, z, \dots$ var. de 1º orden
 $X, Y, Z, \dots$ var de 2º orden (var. de predicados)

c/ var tiene aridad

términos $\leftrightarrow$ individuos de 1º orden (naturales)

función PR $\swarrow$ aridad k $\swarrow$ símbolos de función y variables

$t_1, \dots, t_k \mapsto x \mid f^{(k)}_{t_1, \dots, t_k}$ En particular 0 es una constante denotada por una función de aridad

$$F, G ::= \underbrace{X^{(k)}(t_1, \dots, t_k)}_{\text{átomica}} \mid F \rightarrow G \mid \forall x. F \mid \forall X. F$$

Calificaciones de $\wedge, \vee, \exists$ de 1º y 2º orden usados (ver pág. 3 del paper de quote)

Modelo de Realizabilidad:

A formula

$|A|$ conjunto de términos cerrados

relacionados por el $\perp$

$\|A\|$ conjunto de filtros

$$|A| = \|A\|^\perp$$

$$\|X^k_{t_1, \dots, t_k}\| \in \mathcal{P}(\Pi)$$

$$\|X^k\|: \Pi^k \rightarrow \mathcal{P}(\Pi)$$

Los parámetros de 2º orden son funciones de $(\mathcal{P}(\Pi))^{\Pi^k}$ (k es la aridad)