Términos

recursión, caso base, paso inductivo

tipo 1 $\quad \varphi ::= \alpha \mid \lambda x.t \mid \overset{\text{recursión}}{R}(\underset{\text{caso base}}{t}, \underset{\text{paso inductivo}}{\varphi})$

tipo 0 $\quad t_1, \dots, t_k ::= x \mid f^k(t_1, \dots, t_k) \mid \varphi(t)$

· sea $\langle , \rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \in Pr$ codifica de forma biyectiva los pares de naturales

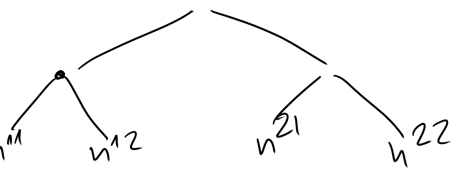
$\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ codifica las proyecciones.

$i = 1,2 \quad \forall x_1 x_2 . \pi_i(\langle x_1, x_2 \rangle) = x_i \qquad \pi_i(n) \overset{\text{notación}}{:=}$

· Podemos con esto codificar lista (y árboles) de naturales?

$[0,1,2] \longmapsto \langle \underbrace{0}_{\text{head}}, \underbrace{\langle 1,2 \rangle}_{\text{tail}} \rangle = n \Rightarrow \langle 0, \langle 1,2 \rangle \rangle = \langle n_1, \langle n^{21}, n^{22} \rangle \rangle$

$n = \langle \langle n^{11}, n^{12} \rangle, \langle n^{21}, n^{22} \rangle \rangle$ árbol



$n = \langle n^1, \langle n^{21}, \langle n^{221}, n^{222} \rangle \rangle \rangle = \langle [n^1, n^{21}, n^{221}, n^{222}] \rangle$

⚠ Idea: empaquetamos el código con el largo de la lista y así sabemos "decodificar" la lista

$\langle [0,1,2] \rangle = \langle \underset{\text{length}}{3}, \langle \underset{\text{head}}{0}, \underset{\text{tail}}{\langle 1,2 \rangle} \rangle \rangle$

Dada una máquina de Turing es posible describir mediante códigos de listas finitas de naturales cómo evoluciona el estado de la máquina.

Podemos escribir un predicado primitivo-recursivo.

- $T(e,n,k)$ que dice "k es un cómputo de la máquina de Turing de código e con entrada n"
- y otro $U(k)$ que devuelve el resultado asociado al cómputo k

$$\{e\}(n) = m \iff m = U(\mu k.\ \underbrace{T(e,n,k)}_{\substack{\text{while} \\ \text{(se puede colgar)}}})$$

$$\{e\}(n) \simeq U(\mu k.\ T(e,n,k))$$

uno converge si y sólo converge el otro

Podemos codificar las funciones en listas!

$(:) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\quad x : \langle xs \rangle = \langle x : xs \rangle$

lista

$\text{tail} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\text{head} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(++) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

concat

$\langle [x_1, \dots, x_n] \rangle \overset{\text{notación}}{=} \langle x_1, \dots, x_n \rangle$

$\mathcal{N} \models \forall x.\ \exists y.\ \underbrace{A(x,y)}_{\text{libre de cuantif}} \Rightarrow \mu y.\ A(x,y)$ función recursiva total

$\mathcal{N} \models \forall x.\ A(x, \{e\}(x))$ para algún e

¡no es un término de tipo 0! (Código de Gödel de)

Supongamos que sólo tenemos símbolos de función de tipo 0

?

$\mathcal{N} \models \exists \alpha.\ \forall x.\ A(x, \alpha(x))$

Pero $A(x, \{e\}(x))$ es una abreviación de:

$$\exists k.\ T(e,x,k) \wedge A(x, U(k))$$