

19/3/25

esquema
provetizado en A

Lemma: $\vdash_{NJ} PEM \leftrightarrow DNE$

PEM: $A \vee \neg A$
DNE: $\neg \neg A \rightarrow A$
 $\neg A ::= A \rightarrow \perp$

Deu:

$$\frac{\frac{\frac{\neg \neg A, \neg A \vdash \perp}{\neg \neg A, \neg A \vdash A} (IE) \quad \frac{}{\neg \neg A, A \vdash A} (ax)}{\neg \neg A, \neg A \vee A \vdash A} (VL)^*}{\neg A \vee A \vdash \neg \neg A \rightarrow A}$$

Recíproco: Es posible derivar esto: $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

en particular $B = \neg A$:

$(\neg A \wedge \neg \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$
 $\vdash \neg(A \vee \neg A)$
 $\neg A \leftarrow$
 $\downarrow$
 $(\neg A \rightarrow \perp)$
 $\swarrow$
 MP
 $\downarrow$
 $\perp$

$\frac{\neg(A \vee \neg A) \vdash \perp}{\vdash \neg \neg(A \vee \neg A)} \rightarrow DNE$
 $\vdash A \vee \neg A$

Def: Algebras de Heyting: $\mathcal{H} = (H, \leq, \wedge, \vee, \rightarrow)$ tal que:

i) $(H, \leq)$ poset que es un reticulado:

$\forall x, y \in H$ existen $x \vee y$ (supremo de x e y)

$x \wedge y$ (ínfimo de x e y)

y satisfacen: $\forall x, y, z \in H \quad x \leq y \rightarrow z \iff \underline{x \wedge y} \leq z$

$\top := 1 \rightarrow 1$ entonces $\forall x \quad x \leq \top$

$$x \leq 1 \rightarrow 1 \iff \underline{x \wedge 1} \leq 1$$

" $\top$ "

Props: 1) En un reticulado completo distributivo.

$a \rightarrow b := \bigvee \{c \in H \mid c \wedge a \leq b\}$
define una flecha de Heyting

2) En un reticulado ^{distributivo} cualquiera, $\rightarrow: H^2 \rightarrow H$
es de Heyting si y sólo si cumple

3) En un algebra de Heyting (que es necesariamente distributiva entre $\wedge$ y $\vee$), la flecha de Heyting es única en virtud de 2)

4) $(a \rightarrow b) \wedge a \leq b$ porque $a \rightarrow b \leq a \rightarrow b$

5) Las algebras de Heyting son distributivas:

$$\forall x, y, z \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Teorema: (Adecuación en cálculo proposicional):

$$A_1, \dots, A_n \vdash B \Rightarrow \llbracket A_1 \rrbracket_p \wedge \dots \wedge \llbracket A_n \rrbracket_p \leq \llbracket B \rrbracket_p$$

Dem: Instalamos regla a regla que esta propiedad para de las premisas a la conclusión:

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \} \rightarrow \begin{matrix} \gamma \leq a \vee b \\ \gamma \wedge a \leq c \\ \gamma \wedge b \leq c \end{matrix} \} \rightarrow \gamma \leq c$$

$$\gamma \wedge (a \vee b) = (\gamma \wedge a) \vee (\gamma \wedge b) \leq c \vee c = c$$

$$\begin{matrix} \vee \\ \gamma \wedge \gamma \\ \parallel \\ \gamma \end{matrix}$$

prop distributiva

$$\overline{\gamma \wedge a \wedge b \leq a}$$

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_n \leq b$$

$$\frac{?}{\frac{}{T} \vdash p \vee \neg p}$$

si esto fuese cierto entonces

$$T \leq u \vee \neg u$$

Pero en el modelo del (2) con $u := \perp = \{0\}$
 $u \vee \neg u = \{0\} \vee \perp = \{0\} \neq \{0, 1\} = T$

$$\vdash \neg \neg p \rightarrow p \Leftrightarrow \neg \neg p \vdash p$$



