

Ej. 1 $\forall n \exists m A(n, m) \iff \exists f \text{ función } \forall n A(n, f(n))$

intuición Matemática Constructiva

en su forma más general (usa el axioma de elección) $\uparrow$ funciones de Skolem.

No es constructivo

si $A(n, m)$ es decidible: $\chi_A(n, m) = \begin{cases} 0 & \leftarrow \text{si } N \models \neg A(n, m) \\ 1 & \leftarrow \text{si } N \models A(n, m) \end{cases}$

$f(n) = \text{p.m. } A(n, m)$

Ej. 2: $\forall n \forall d \exists q \exists r \ 0 \leq r < d \wedge n = dq + r$

Aplicando el algoritmo de división tenemos una prueba constructiva de este principio.

Ej. 3: Paradoja del Borracho: "existe un estudiante de este curso tal que si el es borracho, todos son borrachos".

$\exists x (P(x) \rightarrow \forall y. P(y))$

Prueba clásica: Si vale $\forall y. P(y)$ ya está. Si no, entonces elegimos un x tal que $\neg P(x)$ y la implicación es cierta.

Consideremos $P(y) := y$ no es el código de una prueba de $0=1$

¿Qué significa $\forall y P(y)$? significa que PA es consistente en PA

El 2º teorema de incompletitud de Gödel afirma que si PA es consistente entonces $\neg_{PA} \forall y. P(y)$

Sea $x_0 \in \mathbb{N}$ $P(x_0)$ es primitivo - recursiva

$P(x_0)$ es verdadero $\iff \neg_{PA} P(x_0)$

Entonces, si suponemos PA consistente, $\neg_{PA} P(x_0)$ para todo

$$\frac{\Gamma \vdash \overline{P(x)} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x P(x)} \quad \text{w-rule}$$

Concluimos que $\not\models_{PA} P(x_0) \Rightarrow \forall y P(y)$ para algún $x_0 \in \mathbb{N}$

Es decir que no existe un testigo para esta fórmula en PA:

$$\exists x (P(x) \rightarrow \forall y. P(y))$$

Ejemplo 4: $A(n, m) := m = 0 \leftrightarrow \underbrace{\{n\}^*(n)}_{\substack{\text{la máquina} \\ \text{de Turing de} \\ \text{código } n}} \downarrow$ converge ($\leftrightarrow$ para)

$K = \{x \in \mathbb{N} \mid \{x\}^*(x) \downarrow\}$ no es computable (no es decible mediante funciones computables)

$\not\models_{PA} \forall n \exists m A(n, m)$. Esto no puede tener una función de Skolem computable porque esa función decidiría K