Facultad de Ingeniería - Universidad de la República
Matemática Discreta 1 - Primer semestre de 2025
Primera prueba intermedia - SOLUCIÓN
Respuestas a cada pregunta de múltiple opción:

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A	D	C	C	B	C	B	D	B	B

Pregunta 1

La cantidad $\sum_{i=0}^{7} C_i^7 \cdot C_{7-i}^7$ es igual a: (A) C_7^{14}; (B) 2^7; (C) 7^7; (D) 7^2.

Pregunta 2

La cantidad $\sum_{i=0}^{15} C_i^{15} \cdot C_{15-i}^{15}$ es igual a: (A) 15^2; (B) 2^{15}; (C) 15^{15}; (D) C_{15}^{30}.

Solución de las Preguntas 1 y 2:

Por propiedades de exponentes sabemos que para cualquier entero no negativo n se cumple que

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n. \tag{1}$$

Dos polinomios son idénticos si y solo si cada uno de sus coeficientes son iguales. Vamos a proceder a igualar el coeficiente de x^n de los polinomios que figuran en cada uno de los dos miembros de la ecuación (1).

Por un lado, aplicando la fórmula de la potencia de un binomio para el polinomio $(1+x)^{2n}$ tenemos que

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} C_i^{2n} x^i 1^{2n-i} = \sum_{i=0}^{2n} C_i^{2n} x^i.$$

Entonces, el coeficiente de x^n del polinomio $(1+x)^{2n}$ es igual a C_n^{2n}.

Por otro lado, aplicando la fórmula de la potencia de un binomio en el polinomio $(1+x)^n(1+x)^n$:

$$(1+x)^n(1+x^n) = \sum_{i=0}^{n} C_i^n x^i 1^{n-i} \sum_{j=0}^{n} C_j^n x^j 1^{n-j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} C_i^n C_j^n x^{i+j}.$$

Luego, el coeficiente en x^n del polinomio $(1+x)^n(1+x)^n$ es igual a $\sum_{i=0}^{n} C_i^n C_{n-i}^n$.

Igualando el coeficiente en x^n de los polinomios $(1+x)^{2n}$ y $(1+x)^n(1+x^n)$ se obtiene la siguiente igualdad, que vale para cualquier elección de número natural n:

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^n C_{n-i}^n = C_n^{2n} \tag{2}$$

Tras reemplazar utilizando $n=7$ en la ecuación (2) se deduce que $\sum_{i=0}^{7} C_i^7 C_{7-i}^7 = C_7^{14}$, por la que la respuesta correcta a la Pregunta 1 es la A.

Tras reemplazar utilizando $n = 15$ en la ecuación (2) se deduce que $\sum_{i=0}^{15} C_i^{15} C_{15-i}^{7} = C_{15}^{30}$, por la que la respuesta correcta a la Pregunta 2 es la D.

Pregunta 3
Sean $A = \{1, 2, \ldots, 4\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, 10\}$. La cantidad de funciones de A en B que son estrictamente crecientes es igual a: (A) A_4^{10}; (B) 10^4; (C) C_4^{10}; (D) CR_4^{10}.

Pregunta 4
Sean $A = \{1, 2, \ldots, 7\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, 12\}$. La cantidad de funciones de A en B que son estrictamente crecientes es igual a: (A) A_7^{12}; (B) 12^7; (C) C_7^{12}; (D) CR_7^{12}.

Solución de las Preguntas 3 y 4:

Por definición, C_n^m es igual a la cantidad de subconjuntos con exactamente n elementos que se pueden tomar dentro de un conjunto con exactamente m elementos. Para cada par de números naturales m y n definamos los conjuntos $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, m\}$.

A continuación, probaremos que C_n^m es igual a la cantidad de funciones $f : A \to B$ que son estrictamente crecientes. De hecho, para cada subconjunto que tiene exactamente n elementos de B, digamos $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ donde $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, existe precisamente una función de A en B que es estrictamente creciente, a saber, la única que cumple que $f(i) = b_i$. Recíprocamente, cada función estrictamente creciente de A en B define un único subconjunto con exactamente n elementos dentro de B, que es el conjunto imagen de f. Luego, hay precisamente tantas funciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en $\{1, 2, \ldots, m\}$ que son estrictamente crecientes como C_n^m.

Es posible responder a la Pregunta 3 eligiendo $n = 4$ y $m = 10$. El resultado es C_4^{10}, por lo que la respuesta correcta de la Pregunta 3 es la C.

Es posible responder a la Pregunta 4 eligiendo $n = 7$ y $m = 12$. El resultado es C_7^{12}, por lo que la respuesta correcta de la Pregunta 4 es la C.

Pregunta 5
Hallar el coeficiente en x^6 de $(x^2 - 2x + 1)^4$. (A) 24; (B) 28; (C) 32; (D) 36.

Pregunta 6
Hallar el coeficiente en x^2 de $(x^2 - 2x + 1)^4$. (A) 0; (B) 14; (C) 28; (D) 42.

Solución de las Preguntas 5 y 6:

Notemos que $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$. Entonces, $(x^2 - 2x + 1)^4 = (x - 1)^8$, y por la fórmula de la potencia de un binomio se sigue que

$$(x^2 - 2x + 1)^4 = (x - 1)^8 = \sum_{i=0}^{8} C_i^8 x^i (-1)^{8-i}.$$

El coeficiente en x^6 de dicho polinomio es C_6^8, que es igual a 28. Por lo tanto, la respuesta correcta a la Pregunta 5 es la B.

El coeficiente en x^2 de dicho polinomio es C_2^8, que es igual a 28. Por lo tanto, la respuesta correcta a la Pregunta 6 es la C.

Pregunta 7
En una prueba que consta de 12 preguntas un estudiante decide responder exactamente 8, y quiere que al menos 4 de ellas estén dentro de las 6 primeras preguntas. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo? (A) 300; (B) 360; (C) 420; (D) 480.

Pregunta 8
En una prueba que consta de 12 preguntas un estudiante decide responder exactamente 6, y quiere que al menos 4 de ellas estén dentro de las 7 primeras preguntas. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo? (A) 456; (B) 458; (C) 460; (D) 462.

Solución de las Preguntas 7 y 8:

Para responder a la Pregunta 7, observemos que el estudiante puede responder 4, 5, o 6 preguntas dentro de las primeras 6 preguntas, lo que requiere responder respectivamente 4, 3, o 2 preguntas dentro de las 6 últimas preguntas. Entonces, tras aplicar las reglas de la suma y del producto se deduce que la cantidad de formas distintas que el estudiante puede responder a dichas preguntas es igual a $C_4^6 C_4^6 + C_5^6 C_3^6 + C_6^6 C_2^6 = 225 + 120 + 15 = 360$. Luego, la opción correcta de la Pregunta 7 es la B.

Para responder a la Pregunta 8, observemos que el estudiante puede responder 4, 5, o 6 preguntas dentro de las primeras 7 preguntas, lo que requiere responder respectivamente 2, 1, o 0 preguntas dentro de las 5 últimas preguntas. Entonces, tras aplicar las reglas de la suma y del producto se deduce que la cantidad de formas distintas que el estudiante puede responder a dichas preguntas es igual a $C_4^7 C_2^5 + C_5^7 C_1^5 + C_6^7 C_0^5 = 350 + 105 + 7 = 462$. Luego, la opción correcta de la Pregunta 8 es la D.

Pregunta 9
¿De cuántas formas puede un jugador extraer 5 cartas de una baraja común (de 48 cartas) y obtener tres ases y exactamente dos sotas o cuatro ases y una sota? (A) 96; (B) 28; (C) 14; (D) 24.

Pregunta 10
¿De cuántas formas puede un jugador extraer 6 cartas de una baraja común (de 48 cartas) y obtener cuatro ases y dos sotas o tres ases y tres sotas? (A) 48; (B) 22; (C) 14; (D) 16.

Solución de las Preguntas 9 y 10:

Para la Pregunta 9, por la regla de la suma es posible contar las maneras de extraer exactamente 3 ases, exactamente 2 sotas, luego contar las maneras de extraer exactamente 4 ases y exactamente una sota, y finalmente sumar lo obtenido. Por la regla del producto, la primera tarea se puede realizar de $C_3^4 C_2^4 = 24$ maneras, mientras que la segunda tarea se puede realizar de $C_4^4 C_1^4 = 4$ maneras. Entonces, el resultado es igual a 28, y la opción correcta de la Pregunta 9 es la B.

Para la Pregunta 10, por la regla de la suma es posible contar las maneras de extraer exactamente 4 ases, exactamente 2 sotas, luego contar las maneras de extraer exactamente 3 ases y exactamente 3 sotas, y finalmente sumar lo obtenido. Por la regla del producto, la primera tarea se puede realizar de $C_4^4 C_2^4 = 6$ maneras, mientras que la segunda tarea se puede realizar de $C_4^3 C_3^4 = 16$ maneras. Entonces, el resultado es igual a 22, y la opción correcta de la Pregunta 10 es la B.