Facultad de Ingeniería - Universidad de la República
Coloquio Mensual del IMERL
Tema 2: La Conjetura de Collatz y dinámica de la transformación del mismo nombre
Lista de Ejercicios

Se recomienda elegir 3 ejercicios para entregar dentro de la siguiente lista de 5 ejercicios para quienes elijan el Tema 2 como parte del Módulo de Taller. Para entender los enunciados y notaciones de los ejercicios que siguen se recomienda leer antes el resumen que está al final. En los siguientes ejercicios $T : \mathbb{N}_{\text{impares}} \to \mathbb{N}_{\text{impares}}$ es la transformación de retorno a los impares de la transformación de Collatz, y $x_0 \in \mathbb{N}_{\text{impares}}$ es un estado inicial (número impar) cualquiera.

Ejercicio 1
Realizar un programa que reciba cualquier entero positivo mayor que 1 y, mientras no sea igual a 1, permanezca en un ciclo realizando las dos instrucciones siguientes:

(i) si el número es par se procede a efectuar su división a la mitad; y

(ii) si el número es impar se procede a triplicar y luego sumar 1.

Ejecutar dicho programa y mostrar que, para cada entero x comprendido entre 2 y 1000, termina en 1.

Ejercicio 2

1. Probar que si $(3x_0 + 1)/2$ es impar, entonces $T(x_0) > x_0$.
2. Probar que si $(3x_0 + 1)/2$ es par y $x_0 > 1$, entonces $T(x_0) < x_0$.
3. Probar que 1 es el único punto fijo por T.
4. Probar que si $3x_0 = \sum_{j=0}^{k} 2^j$ para algún natural $k \geq 1$ entonces $T(x_0) = 1$.
5. Probar que si $x_0 = \sum_{j=0}^{k} 4^j$ para algún natural $k \geq 1$ entonces $T(x_0) = 1$.

Ejercicio 3
Sea $n = n(x_0) \geq 1$ el exponente de 2 de la descomposición en factores primos del número par $x_0 + 1$.

1. Probar que $(3/2)^n(x_0 + 1) - 1$ es par.
2. Probar que si $n \geq 2$ y si $1 \leq j \leq n - 1$ entonces $T^j(x_0) = (3/2)^j(x_0 + 1) - 1$. *Sugerencia: verificar primero, para cualquier número impar x, la siguiente igualdad:* $(3x + 1)/2 = (3/2)(x + 1) - 1$.
3. Sea $m = m(x_0) \geq 1$ el exponente de 2 de la descomposición en factores primos del número par $(3/2)^n(x_0 + 1) - 1$. Probar que

$$T^n(x_0) = \frac{(3/2)^n(x_0 + 1) - 1}{2^m}.$$

Ejercicio 4
Sean $n = n(x_0) \geq 1$ y $m = m(x_0) \geq 1$ los números definidos en el Ejercicio 3.

1. Si $n \geq 2$ probar que $x_0 < T(x_0) < \ldots < T^{n-1}(x_0)$ y $T^{n-1}(x_0) > T^n(x_0)$.
2. Si $n = 1$ probar que $x_0 \geq T(x_0) = T^n(x_0)$ y que esta desigualdad es estricta si $x_0 \neq 1$.
3. Concluir que la trayectoria de x_0 por iterados de T no es una sucesión creciente, sino que cada tramo creciente (finito) de iterados consecutivos está seguido de un tramo decreciente, compuesto por lo menos por un iterado.

Ejercicio 5
Sean $n = n(x_0) \geq 1$ y $m = m(x_0) \geq 1$ los números definidos en el Ejercicio 3.

1. Probar que
$$T^n(x_0) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{x_0}{2^m} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3x_j}\right).$$
Sugerencia: verificar primero, para cualquier número impar x, la siguiente igualdad $(3x+1)/2 = (3/2)x(1 + (1/3x))$.

2. Probar que si $m \geq n$ y $x_0 \neq 1$ entonces $T^n(x_0) < x_0$. *Sugerencia:* $(3/2)^n(1/2^m)) = (3/4)^n(1/2^{m-n})$ *y observar que si el número impar x no es 1, entonces* $(1 + 1/(3x)) < 4/3$.

3. Probar que si $T^n(x_0) \leq x_0$ entonces $m > n \log_2(3/2)$.

Resumen

Consideremos la siguiente notación:

- $\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales mayores o iguales que 1.
- $\mathbb{N}_{\text{impares}}$ es el conjunto de los números naturales impares.
- $\mathbb{N}_{\text{pares}}$ es el conjunto de los números naturales pares (mayores o iguales que 2).

La *transformación de Collatz* es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que asigna a cada natural x el natural $3x+1$ si x es impar, o el natural $x/2$ si x es par. El *sistema dinámico por iterados de la transformación de Collatz* consiste en tomar un número natural inicial x_0 cualquiera (llamado *estado inicial*), aplicarle la transformación de Collatz, al resultado obtenido aplicarle de vuelta la transformación de Collatz, y así sucesivamente. Se obtiene una sucesión de números naturales que se llama *sucesión de iterados* de x_0, o también *trayectoria de x_0*, para cada estado inicial elegido.

Como $3x+1$ es par cuando x es impar (chequear esta afirmación), el iterado siguiente a $3x+1$ siempre será $(3x+1)/2$. Entonces, para ahorrar tiempo en las iteraciones, modificamos un poco la definición de la transformación de Collatz, y la reemplazamos por la siguiente transformación $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ también llamada transformación de Collatz, por abuso en el lenguaje, que se define de la siguiente manera:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{2}, & \text{si } x \in \mathbb{N}_{\text{impares}}, \\ \frac{x}{2}, & \text{si } x \in \mathbb{N}_{\text{pares}}. \end{cases}$$

Para cada número natural n, sea $U^n(x_0)$ el resultado de aplicar n veces consecutivas la transformación U partiendo del estado inicial x_0. En otras palabras, $U^n(x_0)$ es el iterado n-ésimo de x_0.

Observación 1. *El elemento* 1 *es un punto periódico para* U*. En efecto,* $U(1) = 2, U^2(1) = U(U(1)) = U(2) = 1$*. Entonces la trayectoria de* 1 *es la sucesión periódica* $2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots$.

Conjetura de Collatz. *Para cualquier estado inicial* $x_0 \in \mathbb{N}$ *la trayectoria de* x_0 *por la transformación de Collatz tiene un iterado que es igual a 1. Por lo tanto, a partir de ese iterado, la trayectoria coincide con la órbita periódica* $1, 2, 1, 2 \ldots$.

La conjetura de Collatz es un problema abierto: no se conoce una demostración de que es verdadera, ni se conoce un contraejemplo que muestre que es falsa.

Se han hecho experimentos en computadora que verfican la conjetura para los estados iniciales menores que $2{,}95 \cdot 10^{20}$. Pero eso no implica que se cumpla para todo x_0 natural.

Proposición 2. *Para cada* $x_0 \in \mathbb{N}$ *existe un iterado* n*-ésimo tal que* $U^n(x_0)$ *que es impar.*

La Proposición 2 asegura que cualquier trayectoria retorna, en algún iterado, al conjunto de los números impares. Pero los siguientes iterados pueden ser pares hasta que nuevamente se cae en los impares, y así sucesivamente. La trayectoria cae en los impares infinitas veces.

Demostración. Vamos a demostrar el enunciado separando en casos según la paridad del estado inicial x_0.

- Primer caso: x_0 es par. Sea $n \geq 1$ el exponente de 2 en la descomposición en factores primos de x_0. Entonces $x_0 = 2^n p$, donde p es impar (notar que p es el producto de todos los demás factores primos distintos de 2). En este caso tenemos que $U^n(x_0) = x_0/2^n = p$, por lo que $U^n(x_0)$ es impar.
- Segundo caso: x_0 es impar y $(3x_0+1)/2$ también es impar. En este caso el primer iterado ya es impar porque $U(x_0) = (3x_0+1)/2$, que es impar.
- Tercer caso: x_0 es impar pero $(3x_0+1)/2$ es par. Sea $m \geq 1$ el exponente de 2 en la descomposición en factores primos de $(3x_0+1)/2$, es decir $(3x_0+1)/2 = 2^m q$ donde q es impar. Entonces,

$$U^{1+m}(x_0) = U^m(U(x_0)) = U^m((3x_0+1)/2) = ((3x_0+1)/2)/2^m = q \in \mathbb{N}_{\text{impares}}.$$

$\square$

Por la Proposición 2, una vez que se cae en el conjunto de los impares la trayectoria vuelve a caer otra vez más en los impares, y otra, y otra...

Definición 3. Sea $T : \mathbb{N}_{\text{impares}} \to \mathbb{N}_{\text{impares}}$ la trasformación que a cada número impar x le hace corresponder el primer iterado $U^n(x)$ que vuelve a ser impar.

A la función T se le conoce como la *transformación de retorno a los impares* de la transformación de Collatz, o en breve, transformación de retorno.

Observación 4. *El elemento* 1 *es un punto fijo para* T*, es decir,* $T(1) = 1$*.*

En efecto, $U(1) = 2, U^2(1) = 1 \in \mathbb{N}_{\text{impares}}$. Entonces $T(1) = U^2(1) = 1$. Por lo tanto la trayectoria de 1 por iteraciones de T es la sucesión constante $1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$.

Obsérvese que para cualquier estado inicial $x_0 \in \mathbb{N}_{\text{impares}}$, la sucesión por iterados de T dada por $T(x_0), T^2(x_0), T^3(x_0), \ldots, T^n(x_0), \ldots$, es la sucesión por iterados de U a la que se le han borrado todos los números pares. Esto es porque para aplicar la transformación de retorno saltamos de un impar al siguiente, tomando todas juntas en un solo paso las iteraciones por U intermedias que daban números pares.

Proposición 5. *Sea* $x_0 \in \mathbb{N}_{impares}$ *un estado inicial impar. Sea* $T : \mathbb{N}_{impares} \to \mathbb{N}_{impares}$ *la transformación de retorno definida en la Definición 3.*

1. *Si* $(3x_0 + 1)/2$ *es impar, entonces*

$$T(x_0) = U(x_0) = \frac{3x_0 + 1}{2}.$$

2. *Si* $(3x_0 + 1)/2$ *es par, entonces*

$$T(x_0) = U^{1+m}(x_0) = \frac{3x_0 + 1}{2^{1+m}},$$

donde $m \geq 1$ *es el exponente de 2 en la descomposición en factores primos del número par* $(3x_0+1)/2$*.*

Demostración. Está probado dentro de la demostración de la Proposición 2. $\square$