

Práctico 2

Lógica Proposicional

Ejercicio 4

$$(\bar{\forall}\psi \in \text{PROP})((\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_\psi)(\varphi \in s)))$$

Demostración usando el PIP para PROP en ψ .
Identificación de la propiedad:

$$P(\psi) := (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_\psi)(\varphi \in s))$$

Paso Base 1

$$\mathbf{T)} P(p_i) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } p_i \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_{p_i})(\varphi \in s))$$

Demo.

Sea φ una fórmula arbitraria de PROP que es subfórmula de p_i .

Por la definición de subfórmula la única posible subfórmula de una letra proposicional es la misma letra proposicional.

Por lo tanto $\varphi = p_i$. **(I)**

Sea $s \in \text{secFORM}_{p_i}$, por la definición de secuencia de formación de p_i es posible asegurar que el último elemento de s es p_i . Por lo demostrado en **(I)** es igual a φ , por lo tanto podemos asegurar que $\varphi \in s$.

Paso Base 2

$$\mathbf{T)} P(\perp) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \perp \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_\perp)(\varphi \in s))$$

Demo.

Sea φ una fórmula arbitraria de PROP que es subfórmula de \perp .

Por la definición de subfórmula la única posible subfórmula de \perp es \perp .

Por lo tanto $\varphi = \perp$. **(II)**

Sea $s \in \text{secFORM}_\perp$, por la definición de secuencia de formación de \perp es posible asegurar que el último elemento de s es \perp . Por lo demostrado en **(II)** es igual a φ , por lo tanto podemos asegurar que $\varphi \in s$.

Paso Inductivo 1

$$\mathbf{H)} P(\psi_1) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi_1 \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_{\psi_1})(\varphi \in s))$$

$$\mathbf{T)} P(\neg\psi_1) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } (\neg\psi_1) \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_{(\neg\psi_1)})(\varphi \in s))$$

Demo.

Sea φ una fórmula arbitraria de PROP que es subfórmula de $(\neg\psi_1)$.

Por la definición de subfórmula hay dos casos posibles:

Caso 1 $\varphi = (\neg\psi_1)$

Sea $s \in \text{secFORM}_{(\neg\psi_1)}$, por la definición de secuencia de formación de $(\neg\psi_1)$ es posible asegurar que el último elemento de s es $(\neg\psi_1)$.

Como estamos en el caso de $\varphi = (\neg\psi_1)$ podemos asegurar que $\varphi \in s$.

Caso 2 φ es subfórmula de ψ_1

Sea $s \in \text{secFORM}_{(\neg\psi_1)}$.

Por la definición de secuencia de formación sabemos que en ψ_1 ocurre en s .

Sea s_1 el prefijo de s que termina en ψ_1 . Por el Lema 1 (demostrado a continuación) podemos afirmar que $s_1 \in \text{secFORM}\psi_1$.

En resumen:

φ es subfórmula de ψ_1 , $s_1 \in \text{secFORM}\psi_1$ por lo tanto estamos en las condiciones de la **hipótesis inductiva** y podemos afirmar que $\varphi \in s_1$. **(A)**

Por construcción s_1 es un prefijo de s . **(B)**

Por **(A)** y **(B)** podemos afirmar que: $\varphi \in s$.

Paso Inductivo 2

H) $P(\psi_1) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi_1 \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_{\psi_1})(\varphi \in s))$

$P(\psi_2) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi_2 \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_{\psi_2})(\varphi \in s))$

T) $P((\psi_1 * \psi_2)) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } (\psi_1 * \psi_2) \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_{(\psi_1 * \psi_2)})(\varphi \in s))$

Demo.

Sea φ una fórmula arbitraria de PROP que es subfórmula de $(\psi_1 * \psi_2)$.

Por la definición de subfórmula hay tres casos posibles:

Caso 1 $\varphi = (\psi_1 * \psi_2)$

Sea $s \in \text{secFORM}_{(\psi_1 * \psi_2)}$, por la definición de secuencia de formación de $(\psi_1 * \psi_2)$ es posible asegurar que el último elemento de s es $(\psi_1 * \psi_2)$.

Como estamos en el caso de $\varphi = (\psi_1 * \psi_2)$ podemos asegurar que $\varphi \in s$.

Caso 2 φ es subfórmula de ψ_1

Sea $s \in \text{secFORM}_{(\psi_1 * \psi_2)}$.

Por la definición de secuencia de formación sabemos que en ψ_1 ocurre en s .

Sea s_1 el prefijo de s que termina en ψ_1 . Por el Lema 1 (demostrado a continuación) podemos afirmar que $s_1 \in secFORM\psi_1$.

En resumen:

φ es subfórmula de ψ_1 , $s_1 \in secFORM\psi_1$ por lo tanto estamos en las condiciones de la **hipótesis inductiva** y podemos afirmar que $\varphi \in s_1$. **(A)**

Por construcción s_1 es un prefijo de s . **(B)**

Por **(A)** y **(B)** podemos afirmar que: $\varphi \in s$.

Caso 3 φ es subfórmula de ψ_2

Por la definición de secuencia de formación sabemos que en ψ_2 ocurre en s .

Sea s_1 el prefijo de s que termina en ψ_2 . Por el Lema 1 (demostrado a continuación) podemos afirmar que $s_1 \in secFORM\psi_2$.

En resumen:

φ es subfórmula de ψ_2 , $s_1 \in secFORM\psi_2$ por lo tanto estamos en las condiciones de la **hipótesis inductiva** y podemos afirmar que $\varphi \in s_1$. **(A)**

Por construcción s_1 es un prefijo de s . **(B)**

Por **(A)** y **(B)** podemos afirmar que: $\varphi \in s$.

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para PROP, podemos afirmar que

$$(\bar{\forall}\psi \in \text{PROP})((\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\bar{\forall}s \in secFORM_\psi)(\varphi \in s)))$$

Lema 1

H) Sea $\varphi \in \text{PROP}$,

$s \in secFORM_\varphi$ tal que $\psi \in s$ y

s' prefijo de s que termina ψ .

T) $s' \in secFORM_\psi$

Demo.

Demostraremos que s' cumple las condiciones para pertenecer a $secFORM_\psi$:

- Todos los elementos de s' son palabras de Σ_{PROP}^* por ser elementos de s y s ser una secuencia de formación de φ .
- Por construcción s' tiene como último elemento a ψ .
- Por ser elementos de s , los elementos de s' (α_k) son de alguna de las siguientes formas:
 - Atómicos - no hay restricciones sobre ellos.
 - $\alpha_k = (\alpha_i * \alpha_j)$, con $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $i < k, j < k$, y tanto α_i , como α_j ocurren en s' ya que son menores a k y por construcción s' tiene todos los elementos de s hasta ψ .

- $\alpha_k = (\neg\alpha_i)$, con $i < k$. De forma análoga a la anterior se puede afirmar que $\alpha_i \in s'$.

Se han verificado todas las condiciones de la definición de secuencia de formación para ψ por lo tanto se cumple la tesis.

Ejercicio 6

- a. I Si $\varphi \in \text{PROP}$ entonces $\langle \varphi, \varphi \rangle \in \text{SUBF}$
 II Si $\langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF}$, entonces $\langle \varphi, (\neg\psi) \rangle \in \text{SUBF}$
 III Si $\langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF}$ y $\alpha \in \text{PROP}$, entonces $\langle \varphi, (\psi * \alpha) \rangle \in \text{SUBF}$, $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
 IV Si $\langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF}$ y $\alpha \in \text{PROP}$, entonces $\langle \varphi, (\alpha * \psi) \rangle \in \text{SUBF}$, $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- b. Enunciado del PIP para SUBF:

H) Sea P una propiedad sobre los elementos de SUBF que cumple:

- I. Para todo $\varphi \in \text{PROP}$, $P(\langle \varphi, \varphi \rangle)$.
 II. Para todo $\langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF}$,
 Si $P(\langle \varphi, \psi \rangle)$ entonces $P(\langle \varphi, (\neg\psi) \rangle)$
 III. Para todo $\langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF}$, $\alpha \in \text{PROP}$ y $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
 Si $P(\langle \varphi, \psi \rangle)$ entonces $P(\langle \varphi, (\psi * \alpha) \rangle)$
 IV. Para todo $\langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF}$, $\alpha \in \text{PROP}$ y $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
 Si $P(\langle \varphi, \psi \rangle)$ entonces $P(\langle \varphi, (\alpha * \psi) \rangle)$

T) Entonces es posible afirmar que P se cumple para todos los elementos de SUBF.

- c. Lo que se quiere probar es:

$$(\bar{\forall} \langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF})(\bar{\forall} s \in \text{secFORM}_\psi)(\varphi \in s)$$

Demostración usando el PIP para SUBF.

Identificación de la propiedad:

$$P(\langle \varphi, \psi \rangle) := (\bar{\forall} s \in \text{secFORM}_\psi)(\varphi \in s)$$

PASO BASE

T) $P(\langle \varphi, \varphi \rangle) : (\bar{\forall} s \in \text{secFORM}_\varphi)(\varphi \in s)$

Demo.

Sea s una secuencia de formación de φ cualquiera.

Por definición de secuencia de formación de φ , podemos afirmar que el último elemento de s es φ .

$$\begin{aligned} s &\in \text{secFORM}_\varphi \\ \Rightarrow & \text{(Definición de sec. de formación de } \varphi) \\ \varphi &\in s \end{aligned}$$

PASO INDUCTIVO 1

H) $P(\langle \varphi, \psi \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$

T) $P(\langle \varphi, (\neg\psi) \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{(\neg\psi)})(\varphi \in s)$

Demo.

Sea s una secuencia de formación de $\neg\psi$ cualquiera. Por definición de secuencia de formación es posible afirmar que $\psi \in s$.

Sea s' el prefijo de s que termina en ψ . Por lo demostrado en el Lema 1 es posible afirmar que $s' \in secFORM_{\psi}$, luego:

$$\begin{aligned} s' &\in secFORM_{\psi} \\ \Rightarrow & \text{(Hipótesis Inductiva)} \\ \varphi &\in s' \\ \Rightarrow & (s' \text{ es prefijo de } s) \\ \varphi &\in s \end{aligned}$$

PASO INDUCTIVO 2

H) $P(\langle \varphi, \psi \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$.

T) $P(\langle \varphi, (\psi * \alpha) \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{(\psi * \alpha)})(\varphi \in s)$

Demo.

Sea s una secuencia de formación de $(\psi * \alpha)$ cualquiera. Por definición de secuencia de formación es posible afirmar que $\psi \in s$.

Sea s' el prefijo de s que termina en ψ . Por lo demostrado en el Lema 1 es posible afirmar que $s' \in secFORM_{\psi}$, luego:

$$\begin{aligned} s' &\in secFORM_{\psi} \\ \Rightarrow & \text{(Hipótesis Inductiva)} \\ \varphi &\in s' \\ \Rightarrow & (s' \text{ es prefijo de } s) \\ \varphi &\in s \end{aligned}$$

PASO INDUCTIVO 3

H) $P(\langle \varphi, \psi \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$

T) $P(\langle \varphi, (\alpha * \psi) \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{(\alpha * \psi)})(\varphi \in s)$

Demo.

A cargo del estudiante.

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para SUBF, podemos afirmar que:

$$(\bar{\forall} \langle \varphi, \psi \rangle \in SUBF)(\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$$

Ejercicio 7

a. **Hipótesis** Sea $s = \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n$ tal que $s \in secFORM_{\psi}$,

$\varphi_i \in s$ y es la fórmula más a la derecha en s que cumple $\varphi_i \notin sub(\psi)$,

$s_1 = \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n$ (se obtiene de s eliminando φ_i)

Tesis $s_1 \in secFORM_{\psi}$

Demo .

Probaremos que s_1 cumple las propiedades de la definición de secuencia de formación de ψ .

- (Símbolos válidos) Dado que $s \in \text{secFORM}_\psi$ sabemos que todos sus elementos son válidos para una secuencia de formación. Como los elementos de s_1 están incluidos en los de s sabemos que estos también son válidos para una secuencia de formación.
- (Último elemento) Dado que $\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n \in \text{secFORM}_\psi$, sabemos por definición de secuencia de formación de ψ que $\varphi_n = \psi$. Además, por hipótesis φ_i no es subfórmula de ψ . Entonces necesariamente $\varphi_i \neq \psi$ de donde s_1 cumple que su último elemento es ψ , dado que tiene los mismos elementos que s menos φ_i y este es distinto a ψ .
- (Elementos anteriores a φ_i) Los elementos que ocurren antes que φ_i en s cumplen todas las propiedades de la definición de secuencia de formación de ψ y como son los mismos en s_1 también lo hacen en esta secuencia. Observar que las propiedades que debe cumplir un elemento dado de la secuencia son siempre sobre elementos anteriores en la misma.
- (Elementos posteriores a φ_i) Resta ver que no existe una φ_k con $k > i$ que viole las condiciones de la definición de secuencia de formación. Si una tal φ_k existiera, esta no podría ser atómica dado que estas fórmulas cumplen la condición de secuencia de formación.

Supongamos que $\varphi_k = \neg\varphi_i$. Como φ_i es la fórmula más a la derecha en la secuencia que no es subfórmula de ψ , sabemos que para todo $j > i$, φ_j es subfórmula de ψ . En particular, φ_k es subfórmula de ψ y por definición de subfórmula junto con la propiedad transitiva probada antes, tenemos que φ_i debe ser también subfórmula de ψ , que es absurdo.

Supongamos ahora que $\varphi_k = \varphi_i * \delta$ con $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Observamos que no se pierde generalidad al asumir que φ_i es la fórmula a la izquierda del conectivo binario. Análogamente al caso anterior, tenemos que φ_k es subfórmula de ψ y por tanto φ_i debe ser también subfórmula de ψ , que es absurdo.

b. La demostración se realiza por absurdo.

Sea s una secuencia de formación de largo mínimo de ψ tal que φ ocurre en s . Supongamos que φ no es subfórmula de ψ . Entonces sabemos que existe una fórmula φ_j que no es subfórmula de ψ y aparece más a la derecha en la secuencia s . Luego, por la parte a) tenemos que $s' = s \setminus \{\varphi_j\}$ es secuencia de formación de ψ , contradiciendo esto el hecho de que s es de largo mínimo.

Ejercicio 8

a,b

$r : \text{PROP} \rightarrow \mathbb{N}$ $r(p_i) = 0, \text{ con } p_i \in P$ $r(\perp) = 0$ $r((\varphi * \psi)) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$ $r((\neg\varphi)) = 1 + r(\varphi)$	$\text{con} : \text{PROP} \rightarrow \mathbb{N}$ $\text{con}(p_i) = 0, \text{ con } p_i \in P$ $\text{con}(\perp) = 1$ $\text{con}((\varphi * \psi)) = 1 + \text{con}(\varphi) + \text{con}(\psi)$ $\text{con}((\neg\varphi)) = 1 + \text{con}(\varphi)$
--	---

c I. **FALSO.**

Si $\varphi = \perp$

$$r(\perp) = 0 < 1 = \text{con}(\perp)$$

II. **FALSO.**

Si $\varphi = p_1$

$$r(p_1) = 0 = \text{con}(p_1)$$

III. **VERDADERO.**

Hay que probar $(\forall \varphi \in \text{PROP}) r(\varphi) \leq \text{con}(\varphi)$

Demostración usando el PIP para PROP en φ .

Identificación de la propiedad:

$$P(\varphi) := r(\varphi) \leq \text{con}(\varphi)$$

Paso Base 1

$$\text{T) } P(p_i) : r(p_i) \leq \text{con}(p_i)$$

Demo.

por definiciones de r y con

$$r(p_i) = 0 = \text{con}(p_i)$$

Paso Base 2

$$\text{T) } P(\perp) : r(\perp) \leq \text{con}(\perp)$$

Demo.

por definiciones de r y con

$$r(\perp) = 0 \leq 1 = \text{con}(\perp)$$

Paso Inductivo 1

$$\text{H) } P(\varphi) : r(\varphi) \leq \text{con}(\varphi)$$

$$\text{T) } P((\neg\varphi)) : r((\neg\varphi)) \leq \text{con}((\neg\varphi))$$

Demo.

Por hipótesis inductiva

$$r(\varphi) \leq \text{con}(\varphi)$$

\Leftrightarrow (por aritmética)

$$r(\varphi) + 1 \leq \text{con}(\varphi) + 1$$

\Leftrightarrow (por def r y con)

$$r((\neg\varphi)) \leq \text{con}((\neg\varphi))$$

Paso Inductivo 2

- H) $P(\varphi_1) : r(\varphi_1) \leq con(\varphi_1)$
 $P(\varphi_2) : r(\varphi_2) \leq con(\varphi_2)$
- T) $P((\varphi_1 * \varphi_2)) : r((\varphi_1 * \varphi_2)) \leq con((\varphi_1 * \varphi_2))$

Demo.

Por hipótesis inductiva y aritmética

$$r(\varphi_1) + r(\varphi_2) \leq con(\varphi_1) + con(\varphi_2)$$

\Leftrightarrow (por aritmética)

$$r(\varphi_1) + r(\varphi_2) + 1 \leq con(\varphi_1) + con(\varphi_2) + 1$$

\Leftrightarrow (por def con)

$$r(\varphi_1) + r(\varphi_2) + 1 \leq con((\varphi_1 * \varphi_2))$$

\Rightarrow ($max\{r(\varphi_1), r(\varphi_2)\} \leq r(\varphi_1) + r(\varphi_2)$)

$$max\{r(\varphi_1), r(\varphi_2)\} + 1 \leq con((\varphi_1 * \varphi_2))$$

\Leftrightarrow (por def r)

$$r((\varphi_1 * \varphi_2)) + 1 \leq con((\varphi_1 * \varphi_2))$$

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP, podemos afirmar que $(\forall \varphi \in \text{PROP}) r(\varphi) \leq con(\varphi)$

Ejercicio 11

- a. I $p_0 \in \text{PROP}'$
- II $p_1 \in \text{PROP}'$
- III Si $\varphi \in \text{PROP}'$ entonces $(\neg\varphi) \in \text{PROP}'$
- IV Si $\varphi \in \text{PROP}'$ y $\psi \in \text{PROP}'$ entonces $(\varphi \rightarrow \psi) \in \text{PROP}'$
- b. Dada la definición de POSF :

- I $p_0 \in \text{POSF}$
- II $p_1 \in \text{POSF}$
- III Si $\varphi \in \text{POSF}$ entonces $\varphi\neg \in \text{POSF}$
- IV Si $\varphi \in \text{POSF}$ y $\psi \in \text{POSF}$ entonces $\varphi \psi \rightarrow \in \text{POSF}$

$f : \text{POSF} \rightarrow \text{PROP}'$	$f^{-1} : \text{PROP}' \rightarrow \text{POSF}$
$f(p_0) = p_0$	$f^{-1}(p_0) = p_0$
$f(p_1) = p_1$	$f^{-1}(p_1) = p_1$
$f(\varphi\neg) = (\neg f(\varphi))$	$f^{-1}((\neg\varphi)) = f^{-1}(\varphi)\neg$
$f(\varphi\psi\rightarrow) = (f(\varphi) \rightarrow f(\psi))$	$f^{-1}((\varphi \rightarrow \psi)) = f^{-1}(\varphi)f^{-1}(\psi)\rightarrow$

c.

$g : \text{POSF} \rightarrow \text{PROP}'$	$g^{-1} : \text{PROP}' \rightarrow \text{POSF}$
$g(p_0) = p_0$	$g^{-1}(p_0) = p_0$
$g(p_1) = p_1$	$g^{-1}(p_1) = p_1$
$g(\varphi\neg) = (\neg g(\varphi))$	$g^{-1}((\neg\varphi)) = g^{-1}(\varphi)\neg$
$g(\varphi\psi\rightarrow) = (g(\psi) \rightarrow g(\varphi))$	$g^{-1}((\varphi \rightarrow \psi)) = g^{-1}(\psi)g^{-1}(\varphi)\rightarrow$

d. La propiedad a demostrar es:

$$(\forall \varphi \in \text{POSF}) f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

Se demuestra por inducción en POSF.

Identificación de la propiedad:

$$P(\varphi) := f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

PASO BASE

T) $\forall i \in \{0, 1\}, \quad P(p_i) : f^{-1}(g(p_i)) = g^{-1}(f(p_i))$

Demo.

$$\begin{aligned} & f^{-1}(g(p_i)) \\ &= \text{(definición de } g) \\ & f^{-1}(p_i) \\ &= \text{(definición de } f^{-1}) \\ & p_i \\ &= \text{(definición de } g^{-1}) \\ & g^{-1}(p_i) \\ &= \text{(definición de } f) \\ & g^{-1}(f(p_i)) \end{aligned}$$

PASO INDUCTIVO 1

H) $P(\varphi) : f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$

T) $P(\varphi \neg) : f^{-1}(g(\varphi \neg)) = g^{-1}(f(\varphi \neg))$

Demo.

$$\begin{aligned} & f^{-1}(g(\varphi \neg)) \\ &= \text{(definición de } g) \\ & f^{-1}(\neg g(\varphi)) \\ &= \text{(definición de } f^{-1}) \\ & f^{-1}(g(\varphi)) \neg \\ &= \text{(Hipótesis Inductiva)} \\ & g^{-1}(f(\varphi)) \neg \\ &= \text{(definición de } g^{-1}) \\ & g^{-1}(\neg f(\varphi)) \\ &= \text{(definición de } f) \\ & g^{-1}(f(\varphi \neg)) \end{aligned}$$

PASO INDUCTIVO 2

H) $P(\varphi) : f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$

$P(\psi) : f^{-1}(g(\psi)) = g^{-1}(f(\psi))$

T) $P(\varphi \psi \rightarrow) : f^{-1}(g(\varphi \psi \rightarrow)) = g^{-1}(f(\varphi \psi \rightarrow))$

Demo.

$$\begin{aligned}
& f^{-1}(g(\varphi \psi \rightarrow)) \\
& = \text{(definición de } g) \\
& f^{-1}((g(\psi) \rightarrow g(\varphi))) \\
& = \text{(definición de } f^{-1}) \\
& f^{-1}(g(\psi)) f^{-1}(g(\varphi)) \rightarrow \\
& = \text{(Hipótesis Inductiva)} \\
& g^{-1}(f(\psi)) g^{-1}(f(\varphi)) \rightarrow \\
& = \text{(definición de } g^{-1}) \\
& g^{-1}(((f(\varphi) \rightarrow f(\psi)))) \\
& = \text{(definición de } f) \\
& g^{-1}(f(\varphi \psi \rightarrow))
\end{aligned}$$

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para POSF, podemos afirmar que:

$$(\forall \varphi \in \text{POSF}) f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

e.

$$\begin{aligned}
f(\varphi) = g(\psi) & \Leftrightarrow \text{(Aplicación de } f^{-1}) \\
f^{-1}(f(\varphi)) = f^{-1}(g(\psi)) & \Leftrightarrow \text{(Composición de una función con su inversa es la } id) \\
\varphi = f^{-1}(g(\psi)) & \Leftrightarrow \text{(Por parte d)} \\
\varphi = g^{-1}(f(\psi)) & \Leftrightarrow \text{(Aplicación de } g) \\
g(\varphi) = g(g^{-1}(f(\psi))) & \Leftrightarrow \text{(Composición de una función con su inversa es la } id) \\
g(\varphi) = f(\psi) & \Leftrightarrow \text{(Commutativa)} \\
f(\psi) = g(\varphi) &
\end{aligned}$$