

# Práctico 2

## Lógica Proposicional

### Ejercicio 4

$$(\bar{\forall}\psi \in \text{PROP})((\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_\psi)(\varphi \in s)))$$

Demostración usando el PIP para PROP en  $\psi$ .  
Identificación de la propiedad:

$$P(\psi) := (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_\psi)(\varphi \in s))$$

#### Paso Base 1

$$\mathbf{T)} P(p_i) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } p_i \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_{p_i})(\varphi \in s))$$

**Demo.**

Sea  $\varphi$  una fórmula arbitraria de PROP que es subfórmula de  $p_i$ .

Por la definición de subfórmula la única posible subfórmula de una letra proposicional es la misma letra proposicional.

Por lo tanto  $\varphi = p_i$ . **(I)**

Sea  $s \in \text{secFORM}_{p_i}$ , por la definición de secuencia de formación de  $p_i$  es posible asegurar que el último elemento de  $s$  es  $p_i$ . Por lo demostrado en **(I)** es igual a  $\varphi$ , por lo tanto podemos asegurar que  $\varphi \in s$ .

#### Paso Base 2

$$\mathbf{T)} P(\perp) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \perp \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_\perp)(\varphi \in s))$$

**Demo.**

Sea  $\varphi$  una fórmula arbitraria de PROP que es subfórmula de  $\perp$ .

Por la definición de subfórmula la única posible subfórmula de  $\perp$  es  $\perp$ .

Por lo tanto  $\varphi = \perp$ . **(II)**

Sea  $s \in \text{secFORM}_\perp$ , por la definición de secuencia de formación de  $\perp$  es posible asegurar que el último elemento de  $s$  es  $\perp$ . Por lo demostrado en **(II)** es igual a  $\varphi$ , por lo tanto podemos asegurar que  $\varphi \in s$ .

#### Paso Inductivo 1

$$\mathbf{H)} P(\psi_1) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi_1 \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_{\psi_1})(\varphi \in s))$$

$$\mathbf{T)} P(\neg\psi_1) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } (\neg\psi_1) \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_{(\neg\psi_1)})(\varphi \in s))$$

**Demo.**

Sea  $\varphi$  una fórmula arbitraria de PROP que es subfórmula de  $(\neg\psi_1)$ .

Por la definición de subfórmula hay dos casos posibles:

**Caso 1**  $\varphi = (\neg\psi_1)$

Sea  $s \in \text{secFORM}_{(\neg\psi_1)}$ , por la definición de secuencia de formación de  $(\neg\psi_1)$  es posible asegurar que el último elemento de  $s$  es  $(\neg\psi_1)$ .

Como estamos en el caso de  $\varphi = (\neg\psi_1)$  podemos asegurar que  $\varphi \in s$ .

**Caso 2**  $\varphi$  es subfórmula de  $\psi_1$

Sea  $s \in \text{secFORM}_{(\neg\psi_1)}$ .

Por la definición de secuencia de formación sabemos que en  $\psi_1$  ocurre en  $s$ .

Sea  $s_1$  el prefijo de  $s$  que termina en  $\psi_1$ . Por el Lema 1 (demostrado a continuación) podemos afirmar que  $s_1 \in \text{secFORM}\psi_1$ .

**En resumen:**

$\varphi$  es subfórmula de  $\psi_1$ ,  $s_1 \in \text{secFORM}\psi_1$  por lo tanto estamos en las condiciones de la **hipótesis inductiva** y podemos afirmar que  $\varphi \in s_1$ . **(A)**

Por construcción  $s_1$  es un prefijo de  $s$ . **(B)**

Por **(A)** y **(B)** podemos afirmar que:  $\varphi \in s$ .

**Paso Inductivo 2**

**H)**  $P(\psi_1) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi_1 \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_{\psi_1})(\varphi \in s))$

$P(\psi_2) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi_2 \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_{\psi_2})(\varphi \in s))$

**T)**  $P((\psi_1 * \psi_2)) : (\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } (\psi_1 * \psi_2) \Rightarrow (\bar{\forall}s \in \text{secFORM}_{(\psi_1 * \psi_2)})(\varphi \in s))$

**Demo.**

Sea  $\varphi$  una fórmula arbitraria de PROP que es subfórmula de  $(\psi_1 * \psi_2)$ .

Por la definición de subfórmula hay tres casos posibles:

**Caso 1**  $\varphi = (\psi_1 * \psi_2)$

Sea  $s \in \text{secFORM}_{(\psi_1 * \psi_2)}$ , por la definición de secuencia de formación de  $(\psi_1 * \psi_2)$  es posible asegurar que el último elemento de  $s$  es  $(\psi_1 * \psi_2)$ .

Como estamos en el caso de  $\varphi = (\psi_1 * \psi_2)$  podemos asegurar que  $\varphi \in s$ .

**Caso 2**  $\varphi$  es subfórmula de  $\psi_1$

Sea  $s \in \text{secFORM}_{(\psi_1 * \psi_2)}$ .

Por la definición de secuencia de formación sabemos que en  $\psi_1$  ocurre en  $s$ .

Sea  $s_1$  el prefijo de  $s$  que termina en  $\psi_1$ . Por el Lema 1 (demostrado a continuación) podemos afirmar que  $s_1 \in secFORM\psi_1$ .

**En resumen:**

$\varphi$  es subfórmula de  $\psi_1$ ,  $s_1 \in secFORM\psi_1$  por lo tanto estamos en las condiciones de la **hipótesis inductiva** y podemos afirmar que  $\varphi \in s_1$ . **(A)**

Por construcción  $s_1$  es un prefijo de  $s$ . **(B)**

Por **(A)** y **(B)** podemos afirmar que:  $\varphi \in s$ .

**Caso 3**  $\varphi$  es subfórmula de  $\psi_2$

Por la definición de secuencia de formación sabemos que en  $\psi_2$  ocurre en  $s$ .

Sea  $s_1$  el prefijo de  $s$  que termina en  $\psi_2$ . Por el Lema 1 (demostrado a continuación) podemos afirmar que  $s_1 \in secFORM\psi_2$ .

**En resumen:**

$\varphi$  es subfórmula de  $\psi_2$ ,  $s_1 \in secFORM\psi_2$  por lo tanto estamos en las condiciones de la **hipótesis inductiva** y podemos afirmar que  $\varphi \in s_1$ . **(A)**

Por construcción  $s_1$  es un prefijo de  $s$ . **(B)**

Por **(A)** y **(B)** podemos afirmar que:  $\varphi \in s$ .

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para PROP, podemos afirmar que

$$(\bar{\forall}\psi \in \text{PROP})(\bar{\forall}\varphi \in \text{PROP})(\varphi \text{ subfórmula } \psi \Rightarrow (\bar{\forall}s \in secFORM_\psi)(\varphi \in s))$$

**Lema 1**

**H)** Sea  $\varphi \in \text{PROP}$ ,

$s \in secFORM_\varphi$  tal que  $\psi \in s$  y

$s'$  prefijo de  $s$  que termina  $\psi$ .

**T)**  $s' \in secFORM_\psi$

**Demo.**

Demostraremos que  $s'$  cumple las condiciones para pertenecer a  $secFORM_\psi$ :

- Todos los elementos de  $s'$  son palabras de  $\Sigma_{\text{PROP}}^*$  por ser elementos de  $s$  y  $s$  ser una secuencia de formación de  $\varphi$ .
- Por construcción  $s'$  tiene como último elemento a  $\psi$ .
- Por ser elementos de  $s$ , los elementos de  $s'$  ( $\alpha_k$ ) son de alguna de las siguientes formas:
  - Atómicos - no hay restricciones sobre ellos.
  - $\alpha_k = (\alpha_i * \alpha_j)$ , con  $*$   $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ,  $i < k, j < k$ , y tanto  $\alpha_i$ , como  $\alpha_j$  ocurren en  $s'$  ya que son menores a  $k$  y por construcción  $s'$  tiene todos los elementos de  $s$  hasta  $\psi$ .

- $\alpha_k = (\neg\alpha_i)$ , con  $i < k$ . De forma análoga a la anterior se puede afirmar que  $\alpha_i \in s'$ .

Se han verificado todas las condiciones de la definición de secuencia de formación para  $\psi$  por lo tanto se cumple la tesis.

## Ejercicio 6

- a. I Si  $\varphi \in \text{PROP}$  entonces  $\langle \varphi, \varphi \rangle \in \text{SUBF}$   
 II Si  $\langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF}$ , entonces  $\langle \varphi, (\neg\psi) \rangle \in \text{SUBF}$   
 III Si  $\langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF}$  y  $\alpha \in \text{PROP}$ , entonces  $\langle \varphi, (\psi * \alpha) \rangle \in \text{SUBF}$ ,  $*$   $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$   
 IV Si  $\langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF}$  y  $\alpha \in \text{PROP}$ , entonces  $\langle \varphi, (\alpha * \psi) \rangle \in \text{SUBF}$ ,  $*$   $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- b. Enunciado del PIP para SUBF:

**H)** Sea  $P$  una propiedad sobre los elementos de SUBF que cumple:

- I. Para todo  $\varphi \in \text{PROP}$ ,  $P(\langle \varphi, \varphi \rangle)$ .  
 II. Para todo  $\langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF}$ ,  
 Si  $P(\langle \varphi, \psi \rangle)$  entonces  $P(\langle \varphi, (\neg\psi) \rangle)$   
 III. Para todo  $\langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF}$ ,  $\alpha \in \text{PROP}$  y  $*$   $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$   
 Si  $P(\langle \varphi, \psi \rangle)$  entonces  $P(\langle \varphi, (\psi * \alpha) \rangle)$   
 IV. Para todo  $\langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF}$ ,  $\alpha \in \text{PROP}$  y  $*$   $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$   
 Si  $P(\langle \varphi, \psi \rangle)$  entonces  $P(\langle \varphi, (\alpha * \psi) \rangle)$

**T)** Entonces es posible afirmar que  $P$  se cumple para todos los elementos de SUBF.

- c. Lo que se quiere probar es:

$$(\bar{\forall} \langle \varphi, \psi \rangle \in \text{SUBF})(\bar{\forall} s \in \text{secFORM}_\psi)(\varphi \in s)$$

Demostración usando el PIP para SUBF.

Identificación de la propiedad:

$$P(\langle \varphi, \psi \rangle) := (\bar{\forall} s \in \text{secFORM}_\psi)(\varphi \in s)$$

### PASO BASE

**T)**  $P(\langle \varphi, \varphi \rangle) : (\bar{\forall} s \in \text{secFORM}_\varphi)(\varphi \in s)$

**Demo.**

Sea  $s$  una secuencia de formación de  $\varphi$  cualquiera.

Por definición de secuencia de formación de  $\varphi$ , podemos afirmar que el último elemento de  $s$  es  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} s &\in \text{secFORM}_\varphi \\ \Rightarrow & \text{(Definición de sec. de formación de } \varphi) \\ \varphi &\in s \end{aligned}$$

**PASO INDUCTIVO 1**

**H)**  $P(\langle \varphi, \psi \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$

**T)**  $P(\langle \varphi, (\neg\psi) \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{(\neg\psi)})(\varphi \in s)$

**Demo.**

Sea  $s$  una secuencia de formación de  $\neg\psi$  cualquiera. Por definición de secuencia de formación es posible afirmar que  $\psi \in s$ .

Sea  $s'$  el prefijo de  $s$  que termina en  $\psi$ . Por lo demostrado en el Lema 1 es posible afirmar que  $s' \in secFORM_{\psi}$ , luego:

$$\begin{aligned} & s' \in secFORM_{\psi} \\ & \Rightarrow \text{(Hipótesis Inductiva)} \\ & \varphi \in s' \\ & \Rightarrow (s' \text{ es prefijo de } s) \\ & \varphi \in s \end{aligned}$$

**PASO INDUCTIVO 2**

**H)**  $P(\langle \varphi, \psi \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$ .

**T)**  $P(\langle \varphi, (\psi * \alpha) \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{(\psi * \alpha)})(\varphi \in s)$

**Demo.**

Sea  $s$  una secuencia de formación de  $(\psi * \alpha)$  cualquiera. Por definición de secuencia de formación es posible afirmar que  $\psi \in s$ .

Sea  $s'$  el prefijo de  $s$  que termina en  $\psi$ . Por lo demostrado en el Lema 1 es posible afirmar que  $s' \in secFORM_{\psi}$ , luego:

$$\begin{aligned} & s' \in secFORM_{\psi} \\ & \Rightarrow \text{(Hipótesis Inductiva)} \\ & \varphi \in s' \\ & \Rightarrow (s' \text{ es prefijo de } s) \\ & \varphi \in s \end{aligned}$$

**PASO INDUCTIVO 3**

**H)**  $P(\langle \varphi, \psi \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s)$

**T)**  $P(\langle \varphi, (\alpha * \psi) \rangle) : (\bar{\forall} s \in secFORM_{(\alpha * \psi)})(\varphi \in s)$

**Demo.**

**A cargo del estudiante.**

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para SUBF, podemos afirmar que:

$$(\bar{\forall} \langle \varphi, \psi \rangle \in SUBF)((\bar{\forall} s \in secFORM_{\psi})(\varphi \in s))$$

**Ejercicio 7**

- a. **Hipótesis** Sea  $s = \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n$  tal que  $s \in secFORM_{\psi}$ ,  
 $\varphi_i \in s$  y es la fórmula más a la derecha en  $s$  que cumple  $\varphi_i \notin sub(\psi)$ ,  
 $s_1 = \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n$  (se obtiene de  $s$  eliminando  $\varphi_i$ )

**Tesis**  $s_1 \in secFORM_{\psi}$

**Demo .**

Probaremos que  $s_1$  cumple las propiedades de la definición de secuencia de formación de  $\psi$ .

- (Símbolos válidos) Dado que  $s \in \text{secFORM}_\psi$  sabemos que todos sus elementos son válidos para una secuencia de formación. Como los elementos de  $s_1$  están incluidos en los de  $s$  sabemos que estos también son válidos para una secuencia de formación.
- (Último elemento) Dado que  $\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n \in \text{secFORM}_\psi$ , sabemos por definición de secuencia de formación de  $\psi$  que  $\varphi_n = \psi$ . Además, por hipótesis  $\varphi_i$  no es subfórmula de  $\psi$ . Entonces necesariamente  $\varphi_i \neq \psi$  de donde  $s_1$  cumple que su último elemento es  $\psi$ , dado que tiene los mismos elementos que  $s$  menos  $\varphi_i$  y este es distinto a  $\psi$ .
- (Elementos anteriores a  $\varphi_i$ ) Los elementos que ocurren antes que  $\varphi_i$  en  $s$  cumplen todas las propiedades de la definición de secuencia de formación de  $\psi$  y como son los mismos en  $s_1$  también lo hacen en esta secuencia. Observar que las propiedades que debe cumplir un elemento dado de la secuencia son siempre sobre elementos anteriores en la misma.
- (Elementos posteriores a  $\varphi_i$ ) Resta ver que no existe una  $\varphi_k$  con  $k > i$  que viole las condiciones de la definición de secuencia de formación. Si una tal  $\varphi_k$  existiera, esta no podría ser atómica dado que estas fórmulas cumplen la condición de secuencia de formación.

Supongamos que  $\varphi_k = \neg\varphi_i$ . Como  $\varphi_i$  es la fórmula más a la derecha en la secuencia que no es subfórmula de  $\psi$ , sabemos que para todo  $j > i$ ,  $\varphi_j$  es subfórmula de  $\psi$ . En particular,  $\varphi_k$  es subfórmula de  $\psi$  y por definición de subfórmula junto con la propiedad transitiva probada antes, tenemos que  $\varphi_i$  debe ser también subfórmula de  $\psi$ , que es absurdo.

Supongamos ahora que  $\varphi_k = \varphi_i * \delta$  con  $*$   $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ . Observamos que no se pierde generalidad al asumir que  $\varphi_i$  es la fórmula a la izquierda del conectivo binario. Análogamente al caso anterior, tenemos que  $\varphi_k$  es subfórmula de  $\psi$  y por tanto  $\varphi_i$  debe ser también subfórmula de  $\psi$ , que es absurdo.

b. La demostración se realiza por absurdo.

Sea  $s$  una secuencia de formación de largo mínimo de  $\psi$  tal que  $\varphi$  ocurre en  $s$ . Supongamos que  $\varphi$  no es subfórmula de  $\psi$ . Entonces sabemos que existe una fórmula  $\varphi_j$  que no es subfórmula de  $\psi$  y aparece más a la derecha en la secuencia  $s$ . Luego, por la parte a) tenemos que  $s' = s \setminus \{\varphi_j\}$  es secuencia de formación de  $\psi$ , contradiciendo esto el hecho de que  $s$  es de largo mínimo.

## Ejercicio 8

a,b

$r : \text{PROP} \rightarrow \mathbb{N}$ $r(p_i) = 0, \text{ con } p_i \in P$ $r(\perp) = 0$ $r((\varphi * \psi)) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$ $r((\neg\varphi)) = 1 + r(\varphi)$	$\text{con} : \text{PROP} \rightarrow \mathbb{N}$ $\text{con}(p_i) = 0, \text{ con } p_i \in P$ $\text{con}(\perp) = 1$ $\text{con}((\varphi * \psi)) = 1 + \text{con}(\varphi) + \text{con}(\psi)$ $\text{con}((\neg\varphi)) = 1 + \text{con}(\varphi)$
--	---

c I. **FALSO.**

Si  $\varphi = \perp$

$$r(\perp) = 0 < 1 = \text{con}(\perp)$$

II. **FALSO.**

Si  $\varphi = p_1$

$$r(p_1) = 0 = \text{con}(p_1)$$

III. **VERDADERO.**

Hay que probar  $(\forall \varphi \in \text{PROP}) r(\varphi) \leq \text{con}(\varphi)$

Demostración usando el PIP para PROP en  $\varphi$ .

Identificación de la propiedad:

$$P(\varphi) := r(\varphi) \leq \text{con}(\varphi)$$

**Paso Base 1**

$$\text{T) } P(p_i) : r(p_i) \leq \text{con}(p_i)$$

**Demo.**

por definiciones de  $r$  y  $\text{con}$

$$r(p_i) = 0 = \text{con}(p_i)$$

**Paso Base 2**

$$\text{T) } P(\perp) : r(\perp) \leq \text{con}(\perp)$$

**Demo.**

por definiciones de  $r$  y  $\text{con}$

$$r(\perp) = 0 \leq 1 = \text{con}(\perp)$$

**Paso Inductivo 1**

$$\text{H) } P(\varphi) : r(\varphi) \leq \text{con}(\varphi)$$

$$\text{T) } P((\neg\varphi)) : r((\neg\varphi)) \leq \text{con}((\neg\varphi))$$

**Demo.**

Por hipótesis inductiva

$$r(\varphi) \leq \text{con}(\varphi)$$

$\Leftrightarrow$  ( por aritmética )

$$r(\varphi) + 1 \leq \text{con}(\varphi) + 1$$

$\Leftrightarrow$  ( por def  $r$  y  $\text{con}$  )

$$r((\neg\varphi)) \leq \text{con}((\neg\varphi))$$

**Paso Inductivo 2**

- H)  $P(\varphi_1) : r(\varphi_1) \leq con(\varphi_1)$   
 $P(\varphi_2) : r(\varphi_2) \leq con(\varphi_2)$
- T)  $P((\varphi_1 * \varphi_2)) : r((\varphi_1 * \varphi_2)) \leq con((\varphi_1 * \varphi_2))$

**Demo.**

Por hipótesis inductiva y aritmética

$$r(\varphi_1) + r(\varphi_2) \leq con(\varphi_1) + con(\varphi_2)$$

$\Leftrightarrow$  ( por aritmética )

$$r(\varphi_1) + r(\varphi_2) + 1 \leq con(\varphi_1) + con(\varphi_2) + 1$$

$\Leftrightarrow$  ( por def con )

$$r(\varphi_1) + r(\varphi_2) + 1 \leq con((\varphi_1 * \varphi_2))$$

$\Rightarrow$  (  $max\{r(\varphi_1), r(\varphi_2)\} \leq r(\varphi_1) + r(\varphi_2)$  )

$$max\{r(\varphi_1), r(\varphi_2)\} + 1 \leq con((\varphi_1 * \varphi_2))$$

$\Leftrightarrow$  ( por def r )

$$r((\varphi_1 * \varphi_2)) + 1 \leq con((\varphi_1 * \varphi_2))$$

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP, podemos afirmar que  $(\forall \varphi \in \text{PROP}) r(\varphi) \leq con(\varphi)$

**Ejercicio 11**

- a. I  $p_0 \in \text{PROP}'$
- II  $p_1 \in \text{PROP}'$
- III Si  $\varphi \in \text{PROP}'$  entonces  $(\neg\varphi) \in \text{PROP}'$
- IV Si  $\varphi \in \text{PROP}'$  y  $\psi \in \text{PROP}'$  entonces  $(\varphi \rightarrow \psi) \in \text{PROP}'$
- b. Dada la definición de POSF :

- I  $p_0 \in \text{POSF}$
- II  $p_1 \in \text{POSF}$
- III Si  $\varphi \in \text{POSF}$  entonces  $\varphi \neg \in \text{POSF}$
- IV Si  $\varphi \in \text{POSF}$  y  $\psi \in \text{POSF}$  entonces  $\varphi \psi \rightarrow \in \text{POSF}$

$f : \text{POSF} \rightarrow \text{PROP}'$	$f^{-1} : \text{PROP}' \rightarrow \text{POSF}$
$f(p_0) = p_0$	$f^{-1}(p_0) = p_0$
$f(p_1) = p_1$	$f^{-1}(p_1) = p_1$
$f(\varphi \neg) = (\neg f(\varphi))$	$f^{-1}((\neg\varphi)) = f^{-1}(\varphi) \neg$
$f(\varphi \psi \rightarrow) = (f(\varphi) \rightarrow f(\psi))$	$f^{-1}((\varphi \rightarrow \psi)) = f^{-1}(\varphi) f^{-1}(\psi) \rightarrow$

c.

$g : \text{POSF} \rightarrow \text{PROP}'$	$g^{-1} : \text{PROP}' \rightarrow \text{POSF}$
$g(p_0) = p_0$	$g^{-1}(p_0) = p_0$
$g(p_1) = p_1$	$g^{-1}(p_1) = p_1$
$g(\varphi \neg) = (\neg g(\varphi))$	$g^{-1}((\neg\varphi)) = g^{-1}(\varphi) \neg$
$g(\varphi \psi \rightarrow) = (g(\psi) \rightarrow g(\varphi))$	$g^{-1}((\varphi \rightarrow \psi)) = g^{-1}(\psi) g^{-1}(\varphi) \rightarrow$



d. La propiedad a demostrar es:

$$(\forall \varphi \in \text{POSF}) f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

Se demuestra por inducción en POSF.

Identificación de la propiedad:

$$P(\varphi) := f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

### PASO BASE

$$\mathbf{T)} \quad \forall i \in \{0, 1\}, \quad P(p_i) : f^{-1}(g(p_i)) = g^{-1}(f(p_i))$$

**Demo.**

$$\begin{aligned} & f^{-1}(g(p_i)) \\ &= (\text{definición de } g) \\ & f^{-1}(p_i) \\ &= (\text{definición de } f^{-1}) \\ & p_i \\ &= (\text{definición de } g^{-1}) \\ & g^{-1}(p_i) \\ &= (\text{definición de } f) \\ & g^{-1}(f(p_i)) \end{aligned}$$

### PASO INDUCTIVO 1

$$\mathbf{H)} \quad P(\varphi) : f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

$$\mathbf{T)} \quad P(\varphi \neg) : f^{-1}(g(\varphi \neg)) = g^{-1}(f(\varphi \neg))$$

**Demo.**

$$\begin{aligned} & f^{-1}(g(\varphi \neg)) \\ &= (\text{definición de } g) \\ & f^{-1}((\neg g(\varphi))) \\ &= (\text{definición de } f^{-1}) \\ & f^{-1}(g(\varphi)) \neg \\ &= (\mathbf{Hipótesis Inductiva}) \\ & g^{-1}(f(\varphi)) \neg \\ &= (\text{definición de } g^{-1}) \\ & g^{-1}((\neg f(\varphi))) \\ &= (\text{definición de } f) \\ & g^{-1}(f(\varphi \neg)) \end{aligned}$$

### PASO INDUCTIVO 2

$$\mathbf{H)} \quad P(\varphi) : f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

$$P(\psi) : f^{-1}(g(\psi)) = g^{-1}(f(\psi))$$

$$\mathbf{T)} \quad P(\varphi \psi \rightarrow) : f^{-1}(g(\varphi \psi \rightarrow)) = g^{-1}(f(\varphi \psi \rightarrow))$$

**Demo.**

$$\begin{aligned}
& f^{-1}(g(\varphi \psi \rightarrow)) \\
& = \text{(definición de } g) \\
& f^{-1}((g(\psi) \rightarrow g(\varphi))) \\
& = \text{(definición de } f^{-1}) \\
& f^{-1}(g(\psi)) f^{-1}(g(\varphi)) \rightarrow \\
& = \text{(Hipótesis Inductiva)} \\
& g^{-1}(f(\psi)) g^{-1}(f(\varphi)) \rightarrow \\
& = \text{(definición de } g^{-1}) \\
& g^{-1}(((f(\varphi) \rightarrow f(\psi)))) \\
& = \text{(definición de } f) \\
& g^{-1}(f(\varphi \psi \rightarrow))
\end{aligned}$$

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para POSF, podemos afirmar que:

$$(\forall \varphi \in \text{POSF}) f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$$

e.

$$\begin{aligned}
f(\varphi) = g(\psi) & \Leftrightarrow \text{(Aplicación de } f^{-1}) \\
f^{-1}(f(\varphi)) = f^{-1}(g(\psi)) & \Leftrightarrow \text{(Composición de una función con su inversa es la } id) \\
\varphi = f^{-1}(g(\psi)) & \Leftrightarrow \text{(Por parte d)} \\
\varphi = g^{-1}(f(\psi)) & \Leftrightarrow \text{(Aplicación de } g) \\
g(\varphi) = g(g^{-1}(f(\psi))) & \Leftrightarrow \text{(Composición de una función con su inversa es la } id) \\
g(\varphi) = f(\psi) & \Leftrightarrow \text{(Commutativa)} \\
f(\psi) = g(\varphi) &
\end{aligned}$$