

Señales y Sistemas

Series de Fourier

Instituto de Ingeniería Eléctrica

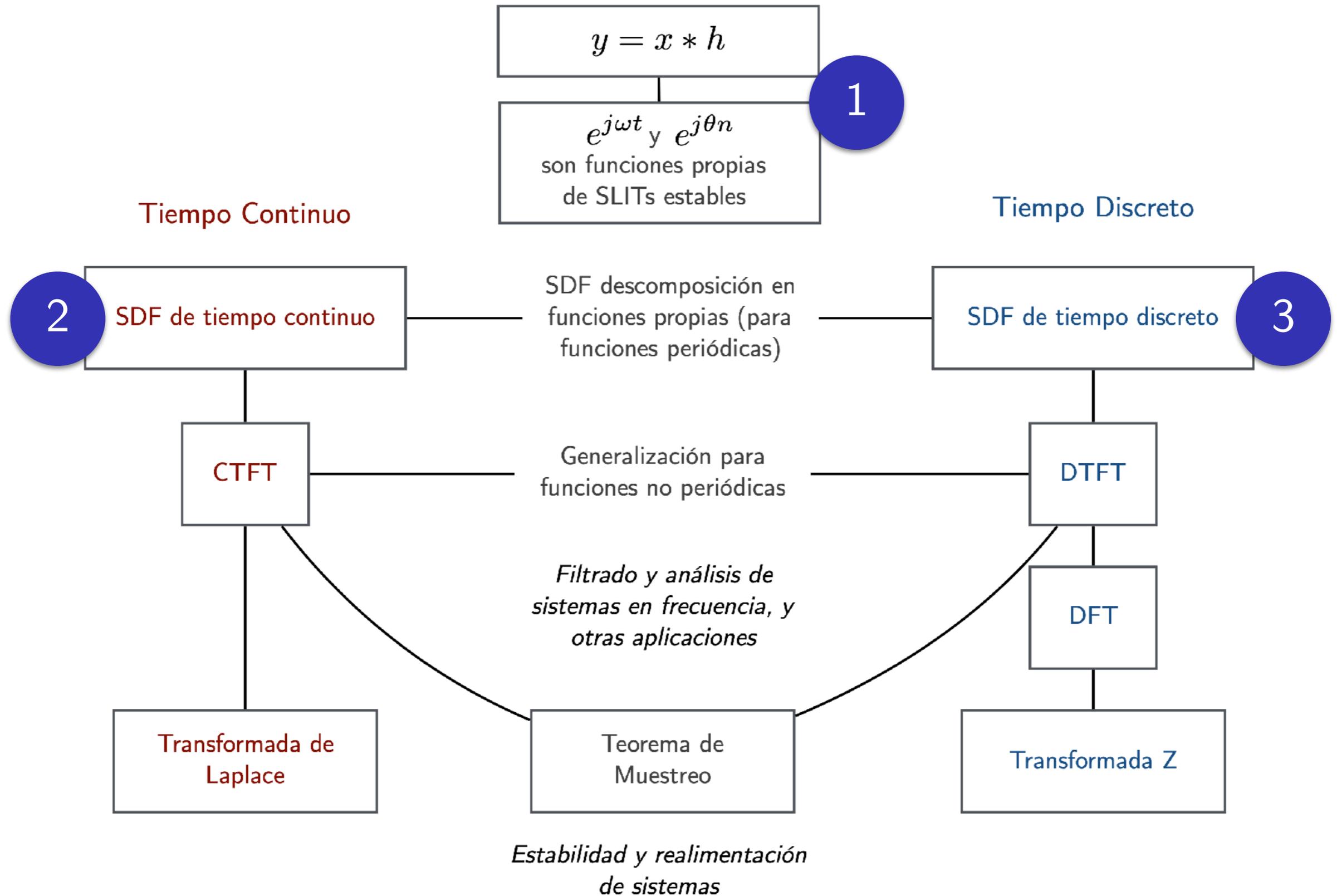


FACULTAD DE
INGENIERÍA



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

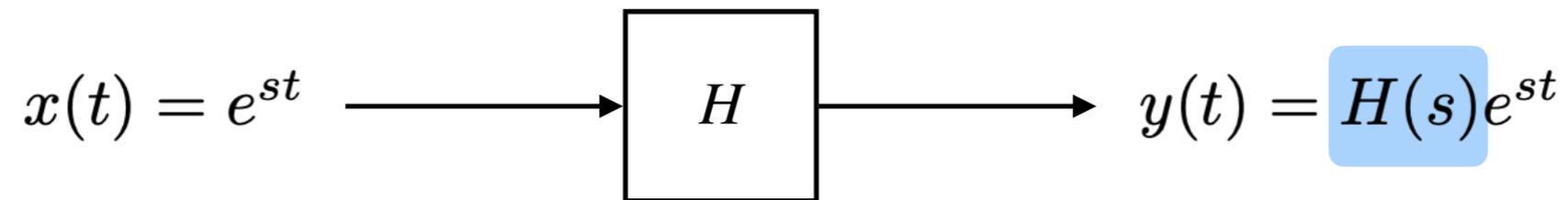
Señales y sistemas



* tiempo o variable

Respuesta de SLITs a entradas exponenciales

Teorema: Sea H un SLIT BIBO estable con una entrada exponencial compleja $x(t)$, entonces la salida $y(t)$ es una exponencial compleja con el mismo argumento (frecuencia).



$$\begin{aligned} y(t) &= (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st} H(s) \end{aligned}$$

Transformada de Laplace

$$s = j\omega \quad x(t) = e^{j\omega t} \quad y(t) = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

Transformada de Fourier

$$\text{BIBO estable} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau < +\infty \Rightarrow H(j\omega) \text{ está bien definida.}$$

Respuesta de SLITs a entradas exponenciales

- Recordar: Si $\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$, entonces \vec{v} es un vector propio de \mathbf{A} con valor propio λ
- Entonces, las exponenciales complejas son **vectores propios** de los SLITs, con **valor propio** $H(s)$

$$x(t) = e^{st} \xrightarrow{H} y(t) = H(s)e^{st}$$

- Con $s = j\omega$ vale en general

$$y(t) = |H(j\omega)|e^{j\omega t + \angle H(j\omega)}$$

- ...y en particular tenemos

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \xrightarrow{H} y(t) = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0))$$

- ¿Recuerdan la definición de **no-distorsión** de un circuito/sistema?

Respuesta de SLITs a entradas exponenciales

- Vale lo mismo en variable discreta.

$$x[n] = z^n$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] =$$

$$= \sum_k h[k]z^{n-k} = z^n \sum_k h[k]z^{-k}$$

$$= z^n H(z)$$

Transformada Z

$$z = e^{j\theta} \xrightarrow{H} y[n] = H(e^{j\theta}) e^{j\theta n}$$

$$z = \cos(\theta_0 n) \xrightarrow{H} y[n] = |H(e^{j\theta_0})| \cos(\theta_0 n + \angle H(e^{j\theta_0}))$$

Respuesta de SLITs a entradas exponenciales

- Generalizando, vemos que si la entrada a un SLIT BIBO estable es una combinación lineal de exponenciales complejas, entonces, la salida se puede representar como una combinación lineal de las **mismas exponenciales complejas**.

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \xrightarrow{H} y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \xrightarrow{H} y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

- Este resultado fue planteado por Euler, usado por Gauss, Lagrange y otros, y luego Fourier los generalizó preguntando...

¿Qué funciones pueden representarse como la combinación lineal de exponenciales complejas?

Leonhard Euler
(1707 - 1783)



Joseph-Louis
Lagrange
(1736 - 1813)



Carl Friedrich
Gauss
(1777 - 1855)



Jean-Baptiste Joseph Fourier
(1768 - 1830)





Series de Fourier

Series de Fourier

- $x(t)$ periódica, de período T : $x(t + T) = x(t) \forall t$ ($\omega_0 = 2\pi/T$)

Serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] e^{jk\omega_0 t} \quad \text{Síntesis}$$

$$a[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \quad \text{Análisis}$$

- Descomposición en senos y cosenos

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\omega_0 t) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega_0 t)$$

↑
contínua,
promedio,
media, ...

↑ reales

Nomenclatura

$$a_k = a[k]$$

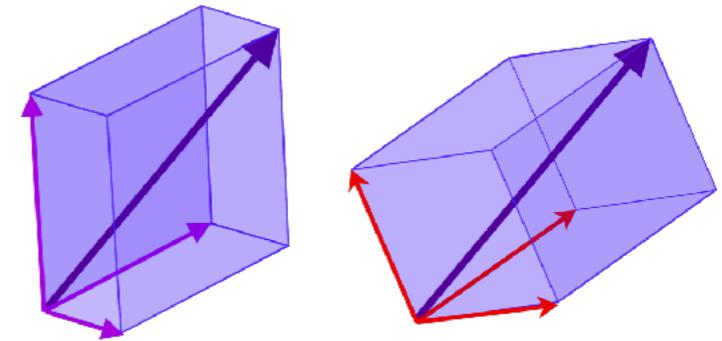
$$b_k = b[k]$$

Series de Fourier

- Producto interno de señales periódicas T

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) y^*(t) dt \quad \Rightarrow \quad a[k] = \langle x(t), e^{jk\omega_0 t} \rangle$$

- La Serie de Fourier de una señal periódica es su representación en una **base ortonormal** (de dimensión infinita) **de exponenciales** (o senos y cosenos) de **frecuencias $k\omega_0$** .
 - Los $a[k]$ ($b[k]$, $c[k]$) son los coeficientes de la descomposición.
 - Las exponenciales son los **vectores propios**, los coeficientes son los **valores propios**.



El mismo vector representado en dos bases diferentes.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] e^{jk\omega_0 t}$$

Serie de Fourier

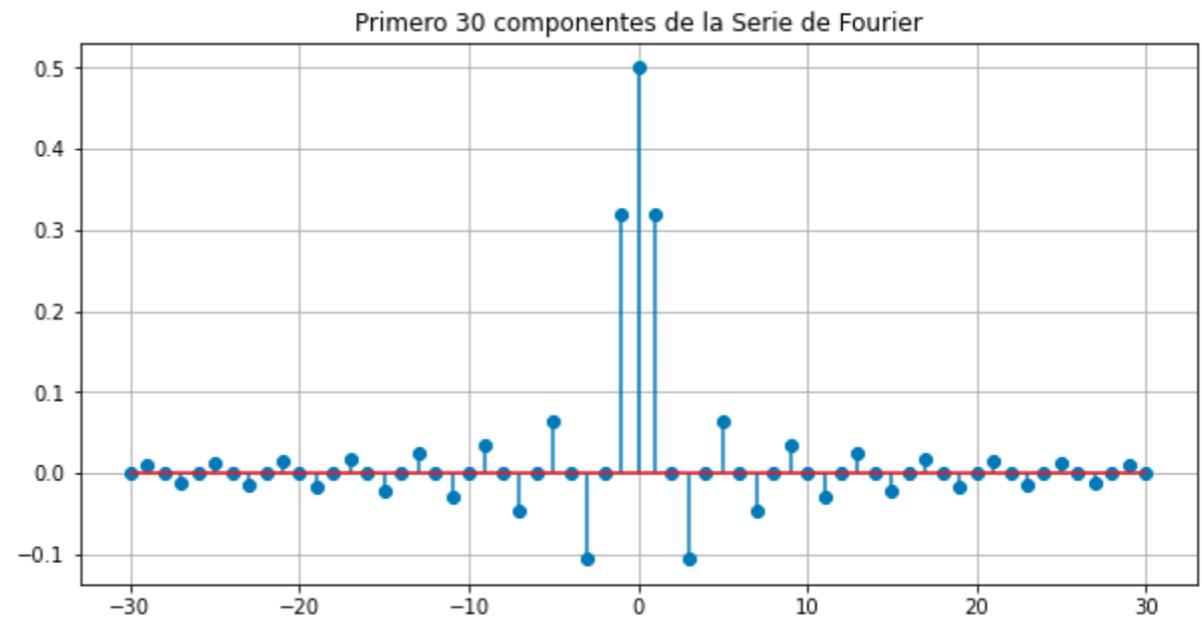
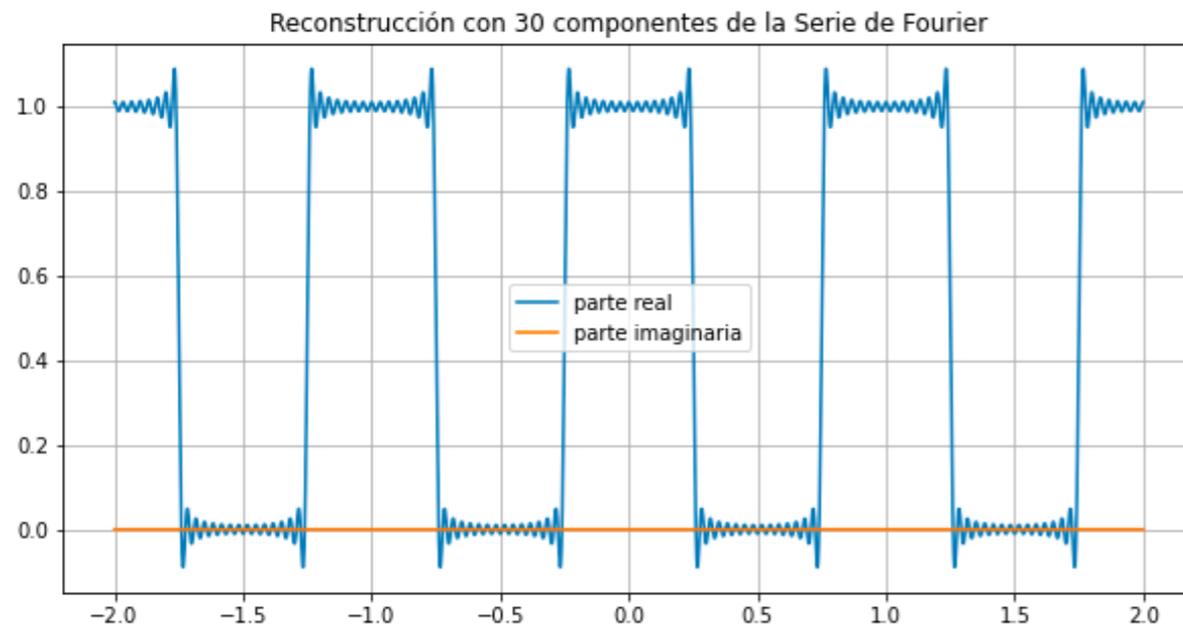
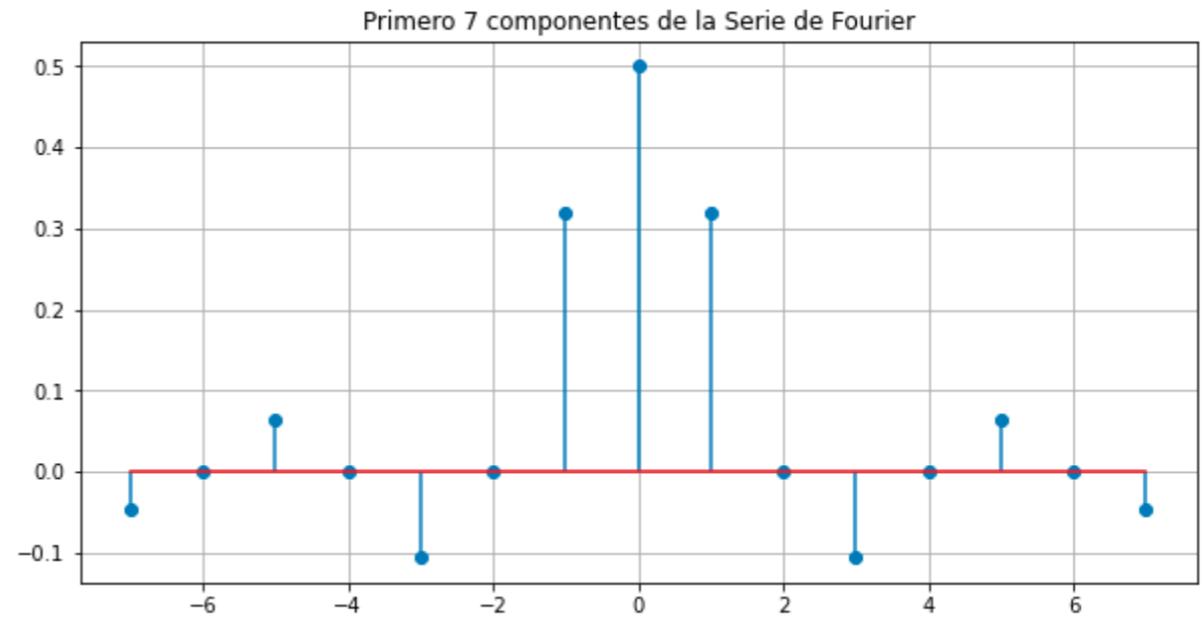
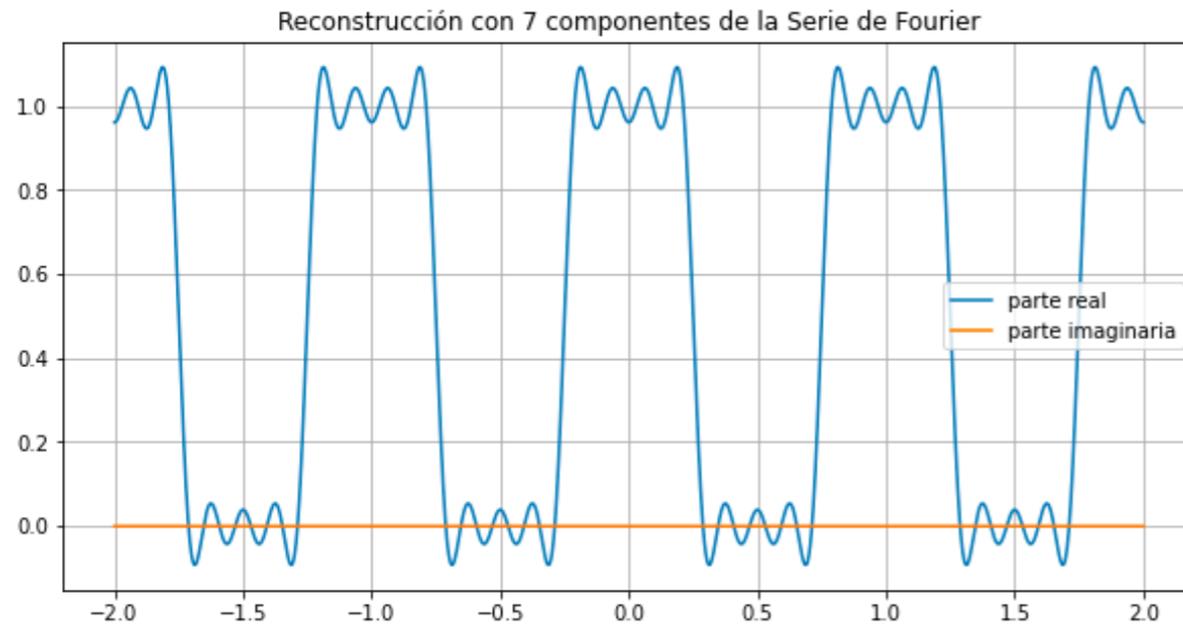
Series de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-N}^N a[k] e^{jk\omega_0 t}$$

En la práctica, usamos finitos coeficientes $(2N + 1)$.

$x(t)$

$a[k]$



Series de Fourier

Ejemplo (3.2): Hallar N y los correspondiente $a[k]$ para escribir

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)$$

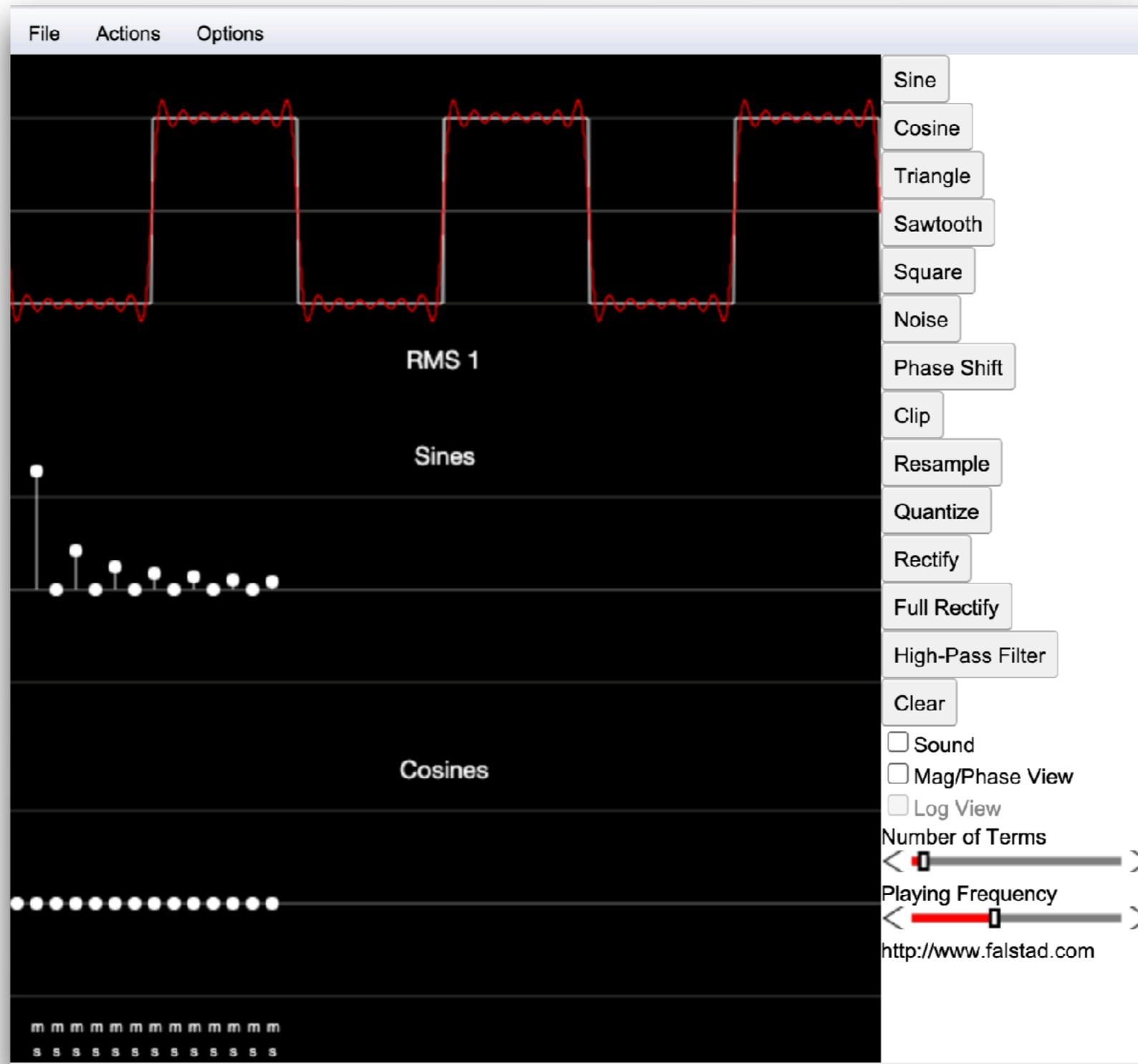
de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-N}^N a[k] e^{jk\omega_0 t}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2j} (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$$

Series de Fourier



<http://www.falstad.com/fourier/>

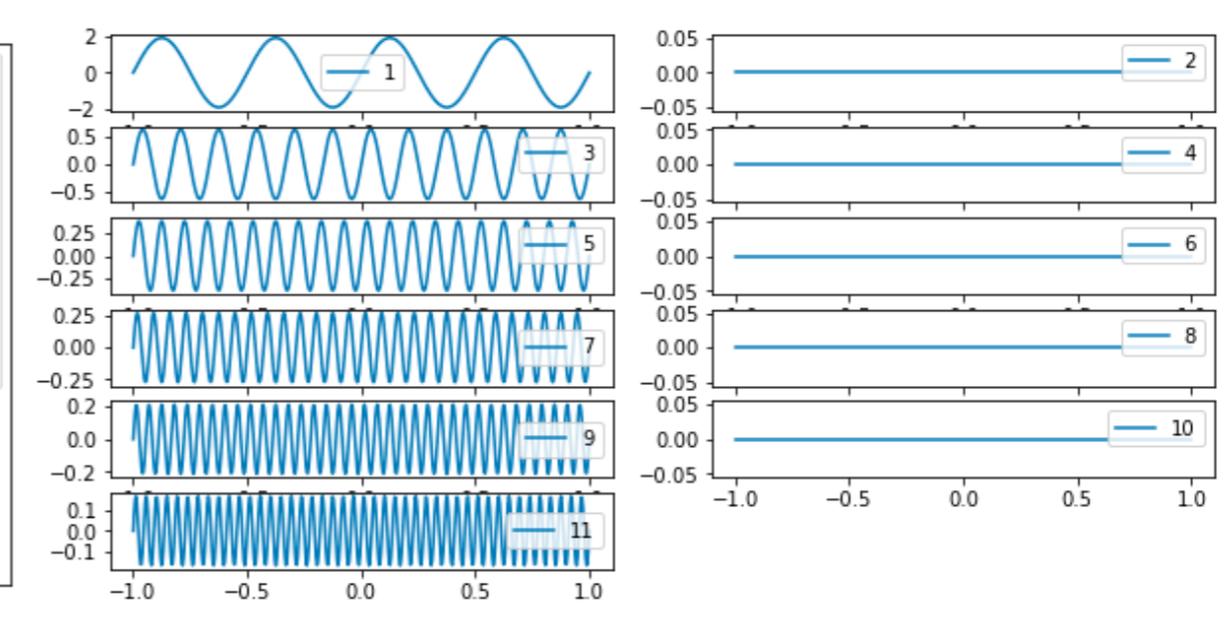
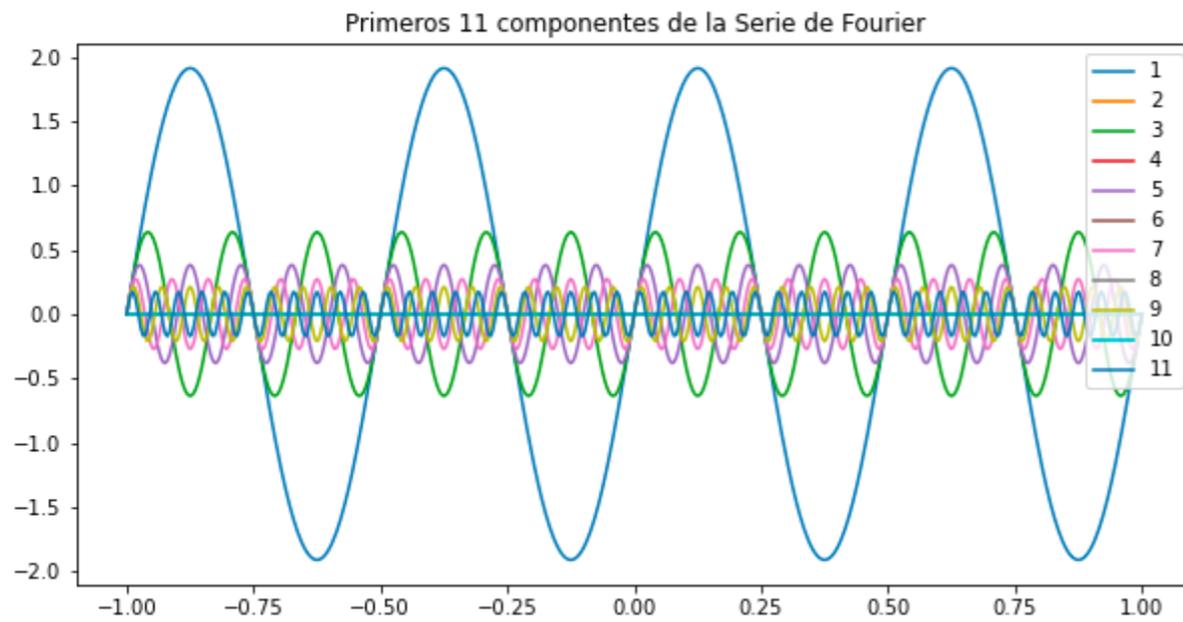
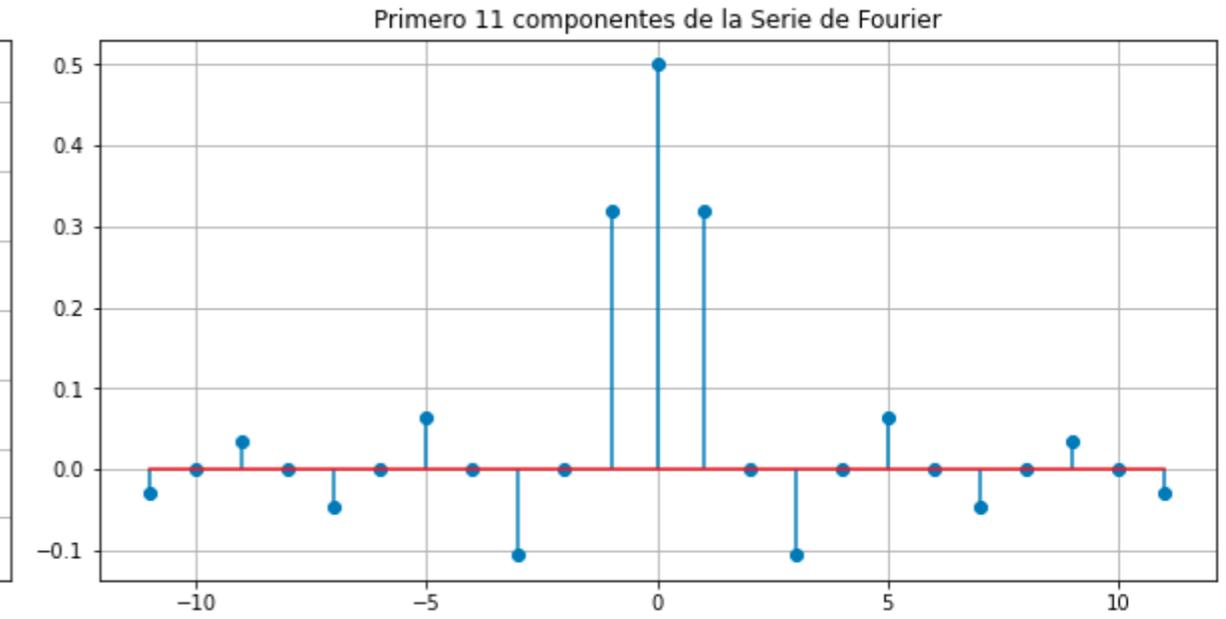
Series de Fourier

$x(t)$

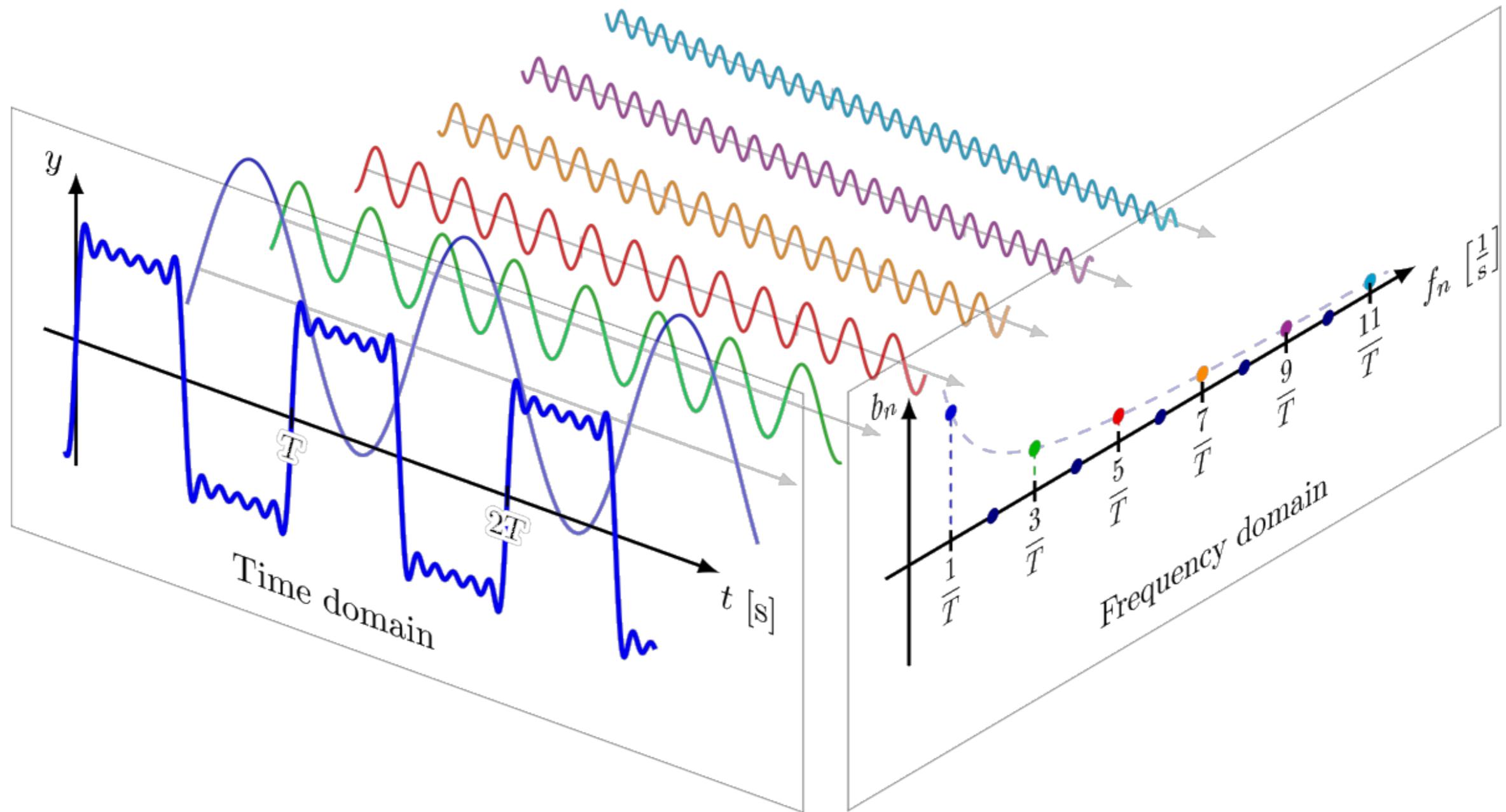


$c[k]$

$b[k] = 0$

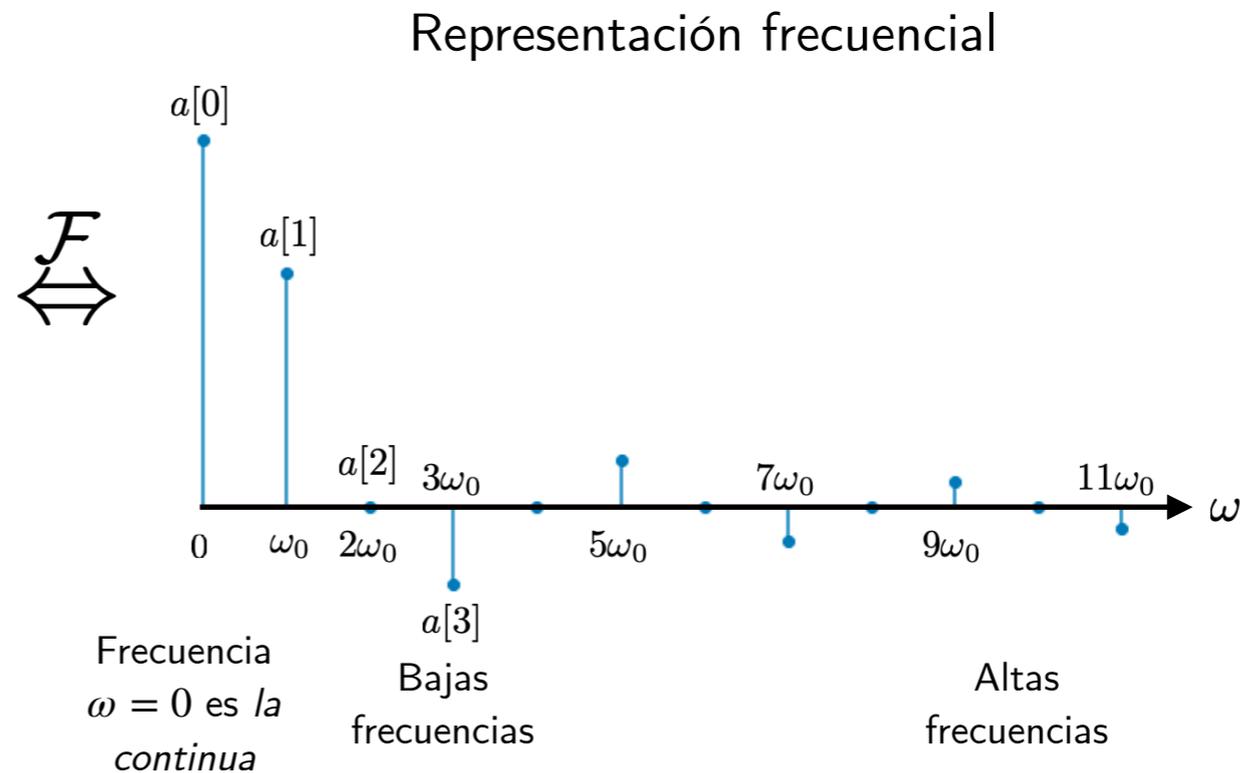


Series de Fourier



Series de Fourier

- Espectro: gráfica de los valores de la representación frecuencial (dominio de Fourier)



Son valores complejos, tienen dos dimensiones, se representan en módulo y fase, o parte real e imaginaria.

Series de Fourier

Ejemplos

$$x_1(t) = \sin \omega_0 t$$

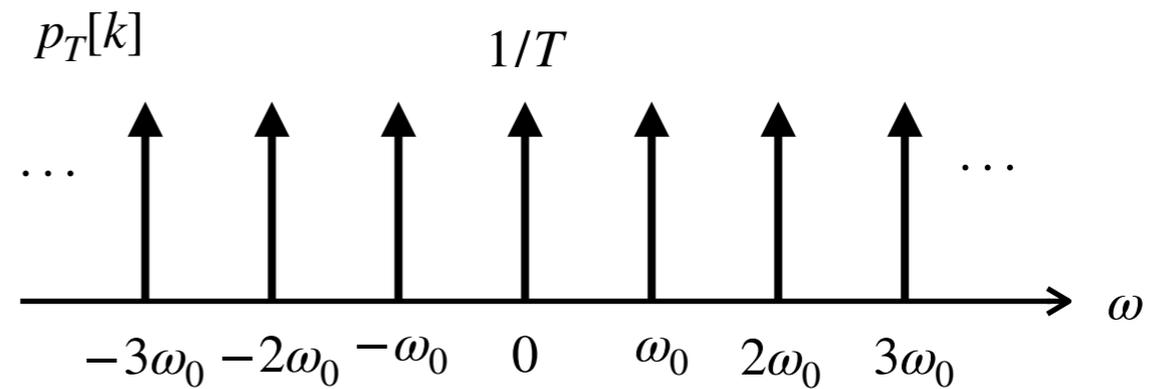
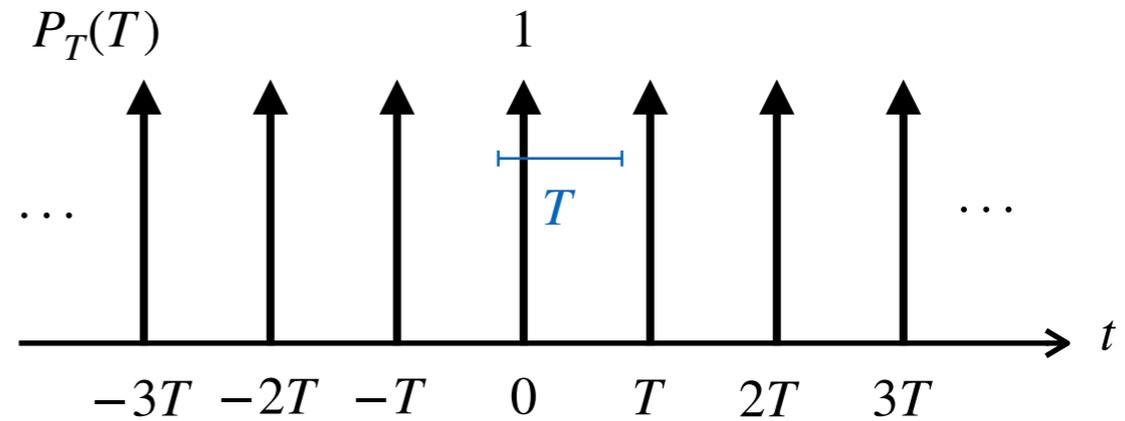
$$x_2(t) = 1 + \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t + \cos \left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4} \right)$$

Series de Fourier

Ejemplo: Peine de Dirac o Tren de Impulsos

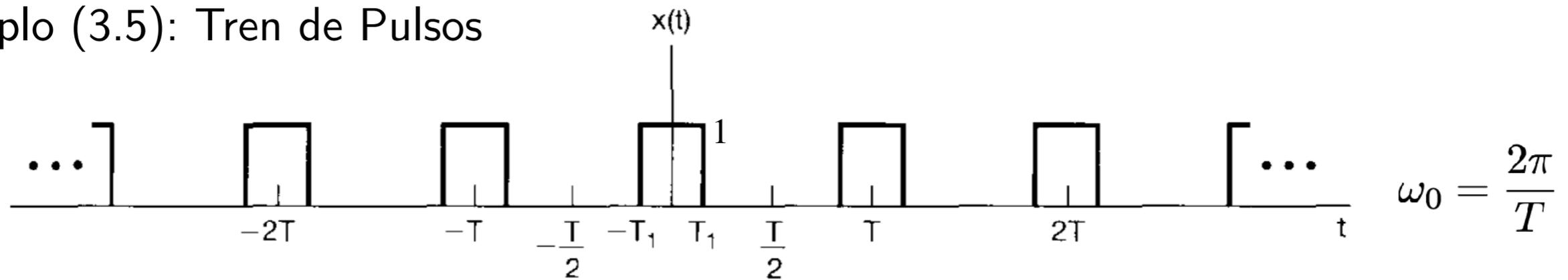
$$P_T(t) = \sum_k \delta(t - kT)$$
$$= \frac{1}{T} \sum_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$p_T[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \delta(t - mT) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} e^{-j2\pi km} = \frac{1}{T}$$



Series de Fourier

Ejemplo (3.5): Tren de Pulsos



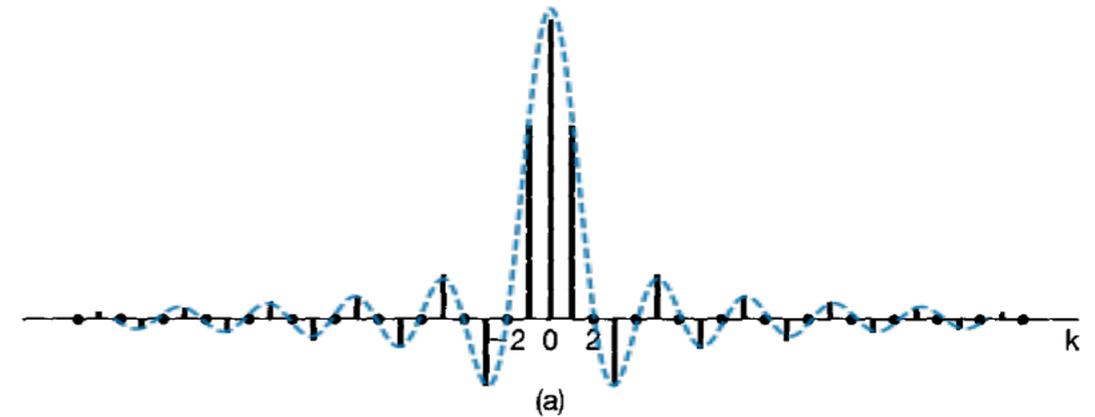
En un período

$$x_{\Pi}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T_1/2 \end{cases} = \Pi\left(\frac{t}{2T_1}\right)$$

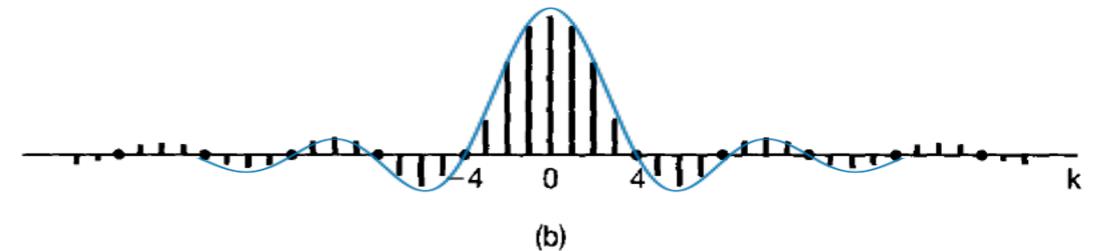
$$x(t) = \sum_k \Pi\left(\frac{t - kT}{2T_1}\right)$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{2T_1}{T} & k = 0 \\ \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} & k \neq 0 \end{cases}$$

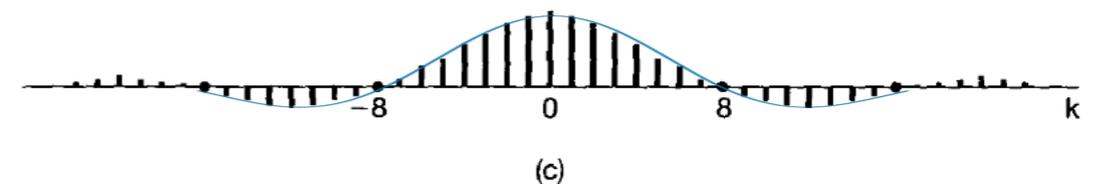
$$T = 4T_1$$



$$T = 8T_1$$



$$T = 16T_1$$



Convergencia de las Series de Fourier

- Consideremos $x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$ y $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$, queremos

$$E_N = \int_{\langle T \rangle} |e_N(t)|^2 dt \xrightarrow{N \uparrow +\infty} 0$$

- Los a_k óptimos con $x_N(t)$ son $a_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$, entonces $x_N(t)$ es una versión truncada de la SdeF.
- En general, si la señal (periódica) es continua, sí se cumple, y la señal es igual a su representación en Serie de Fourier.
- También si es de energía finita $\int_{\langle T \rangle} |x(\tau)|^2 d\tau < \infty \Rightarrow a_k < \infty$
 - Los sistemas físicos responden a señales de energía finita en un período y esto se va a cumplir en la práctica.
- Si la señal no es continua se definen un conjunto de condiciones que debe cumplir para la convergencia.

Convergencia de las Series de Fourier



Johann Peter Gustav
Lejeune Dirichlet
(1805 - 1859)

- Condiciones de Dirichlet (en un período)

1. Ser absolutamente integrable

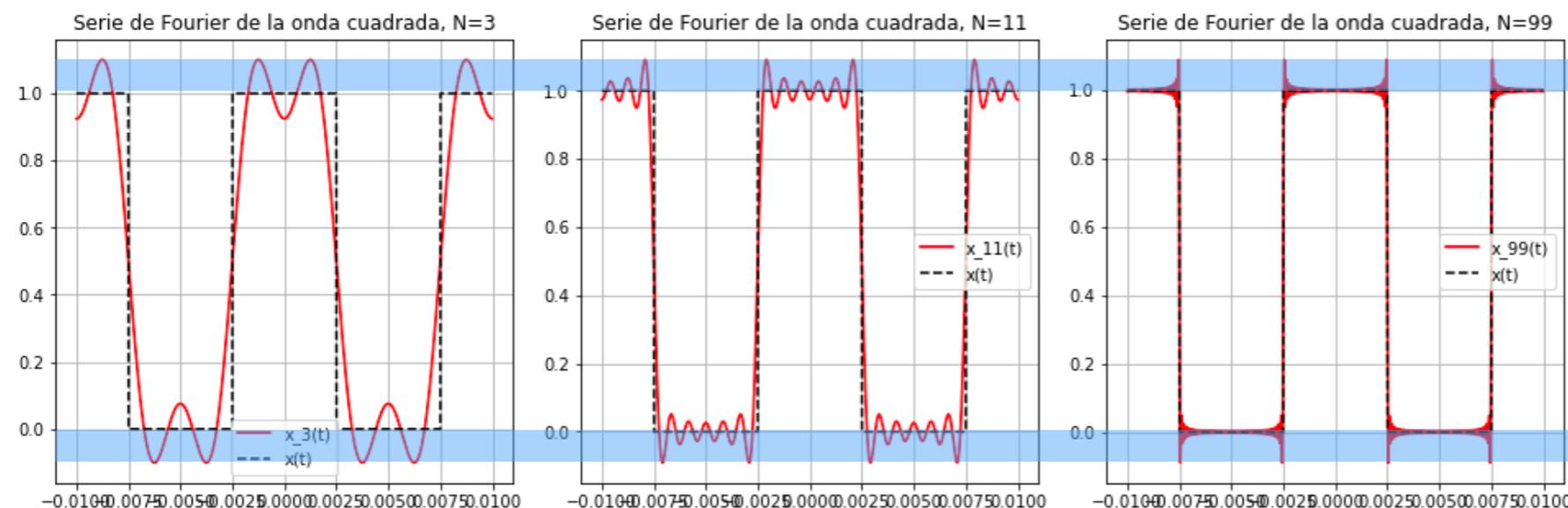
$$\int_{\langle T \rangle} |x(\tau)| d\tau < \infty \Rightarrow |a_k| < \infty$$

2. Variaciones acotadas, o sea, número finito de máximos y mínimos.

3. Número finito de discontinuidades y éstas son finitas.

- Garantizan que la $e(t) = 0$ y que en las discontinuidades vale

$$x_N(t_k) \xrightarrow{N \uparrow \infty} \frac{1}{2} (x(t_k^+) + x(t_k^-))$$



I Independiente de N
(Fenómeno de Gibbs)



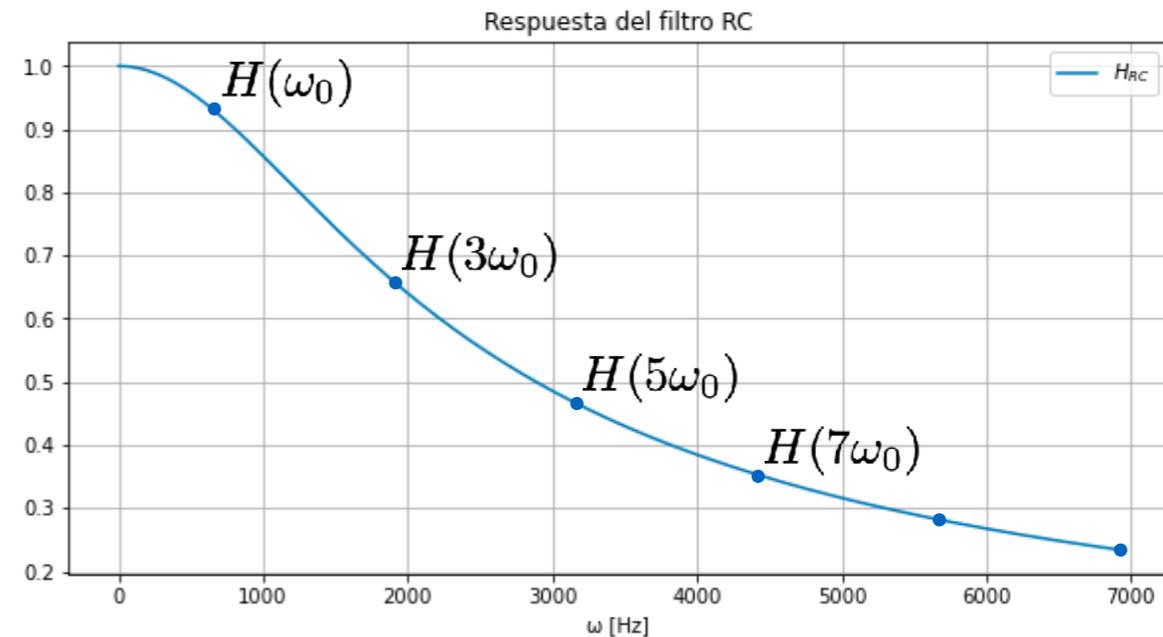
Josiah Willard Gibbs
(1839 - 1903)

Serie de Fourier: Filtrado

$$x(t) = \sum_k a[k] e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{H} y(t) = \sum_k a[k] H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

- Modificar los coeficientes de la SdeF en frecuencia a partir de los valores de $H(jk\omega_0)$.
- Multiplica los coeficientes por $H(jk\omega_0)$

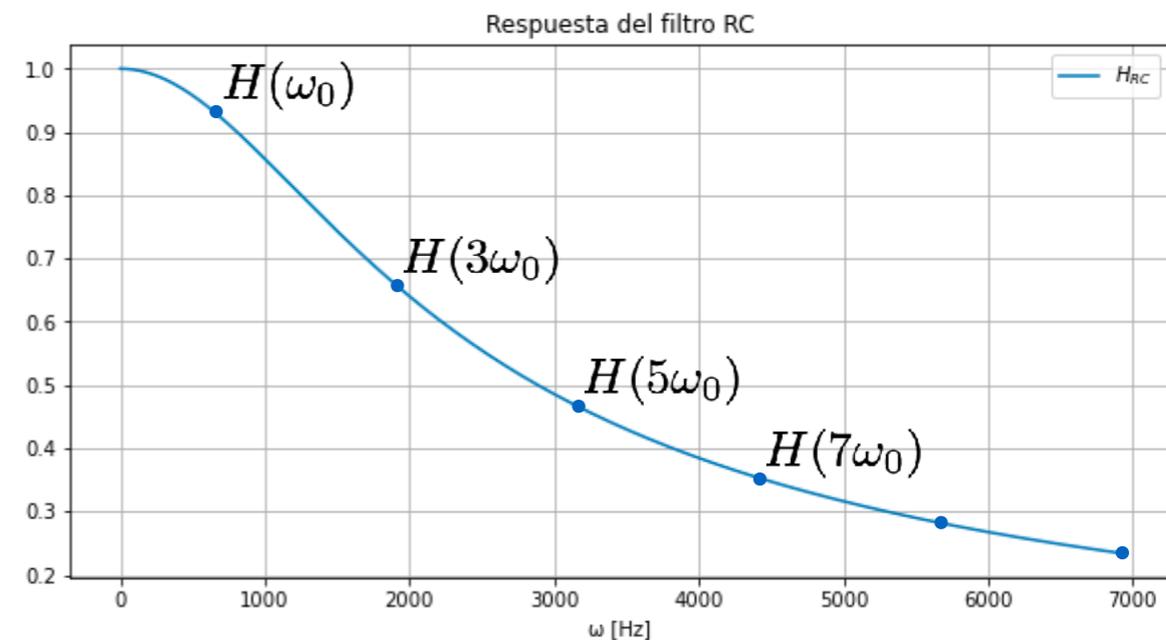
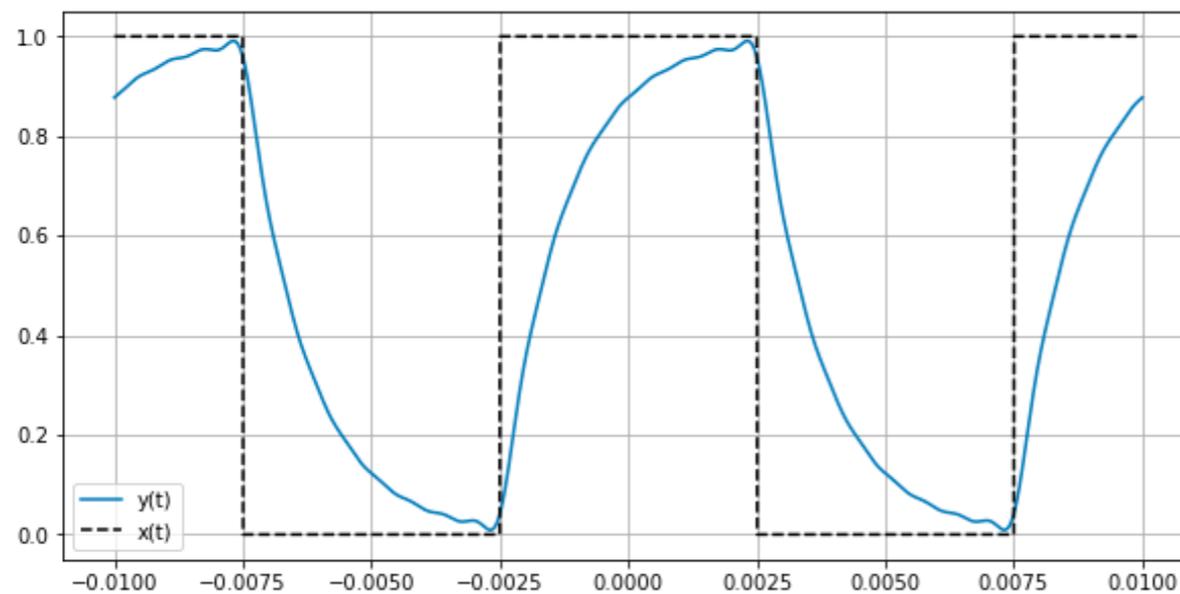
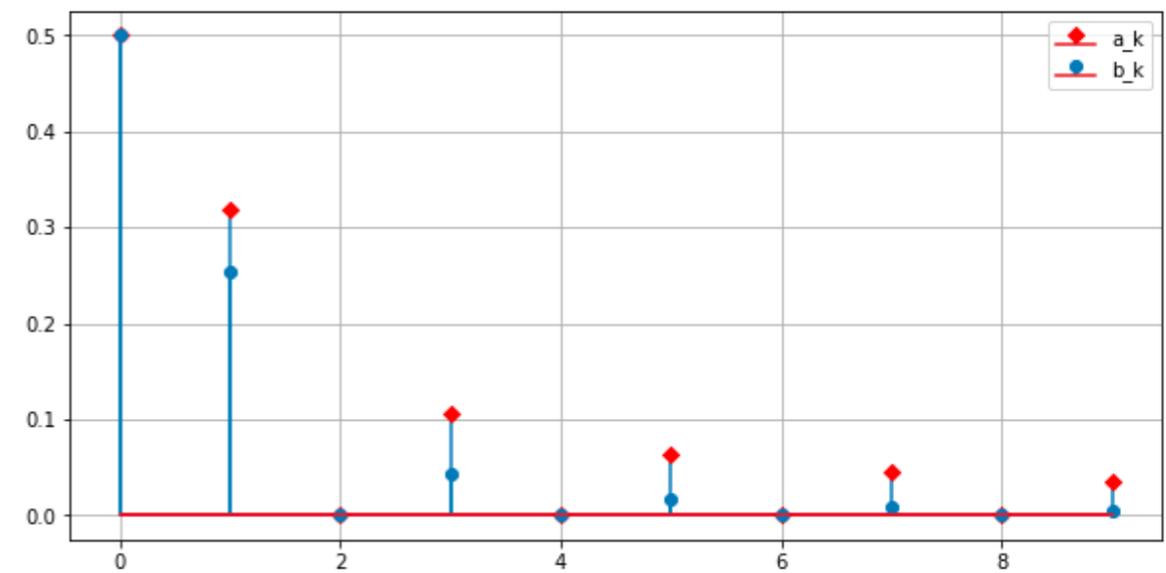
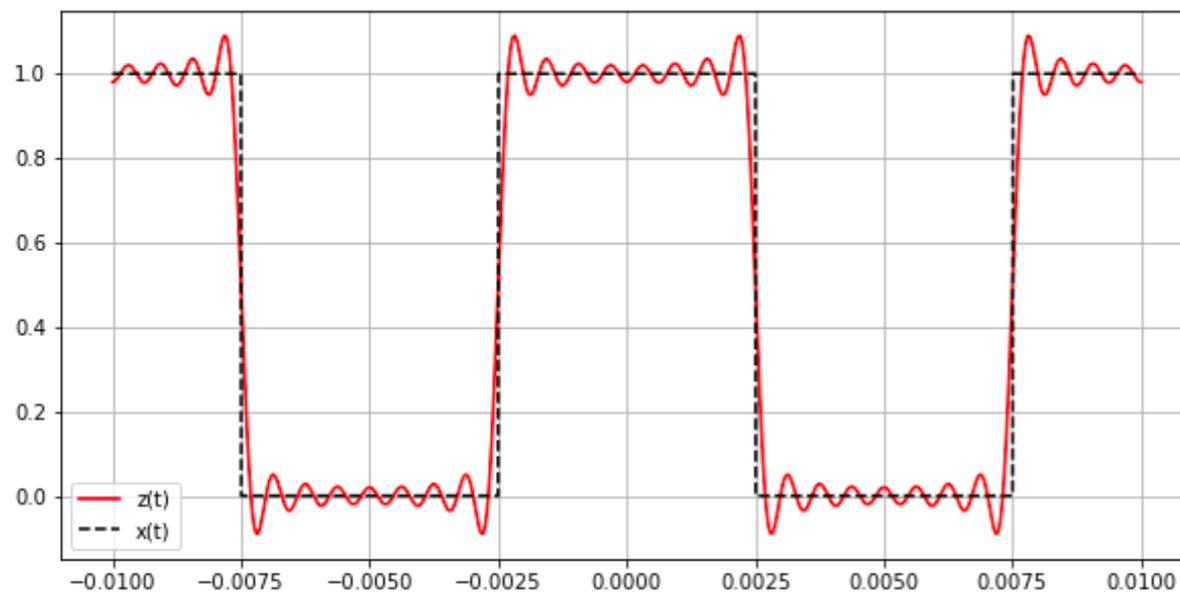
$$H_{RC}(j\omega) = \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$



Serie de Fourier: Filtrado

- Filtrado de una onda cuadrada con un RC

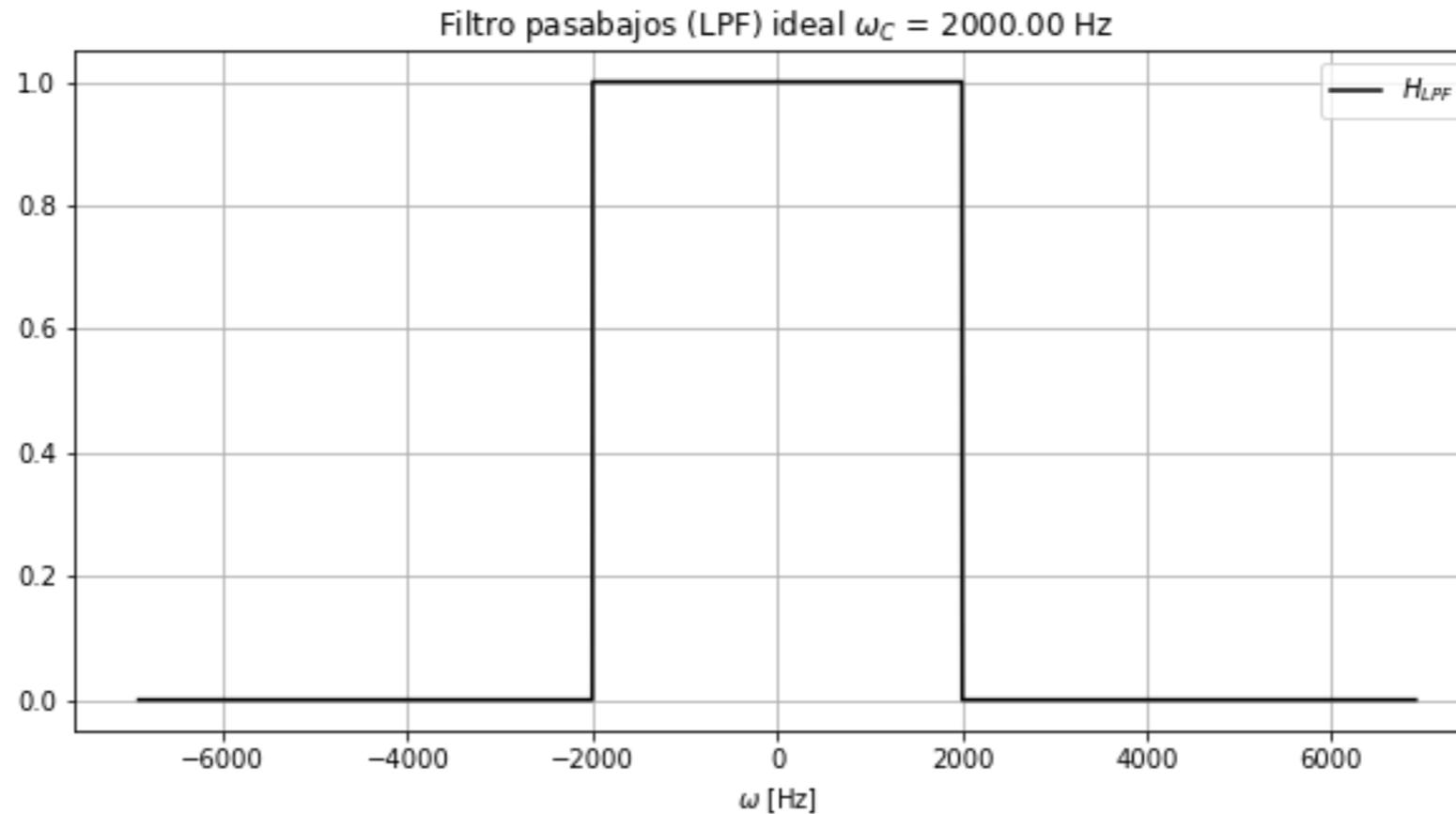
$$H_{RC}(j\omega) = \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$



Serie de Fourier: Filtrado

- Filtro pasabajos ideal (LPF)

$$H_{LPF} = \Pi \left(\frac{\omega}{2\omega_C} \right) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_C \\ 0, & |\omega| > \omega_C \end{cases}$$



Algunas funciones e identidades útiles

$$\text{sinc } t = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

$$\text{sign } t = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$\Pi \left(\frac{t}{\tau} \right) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

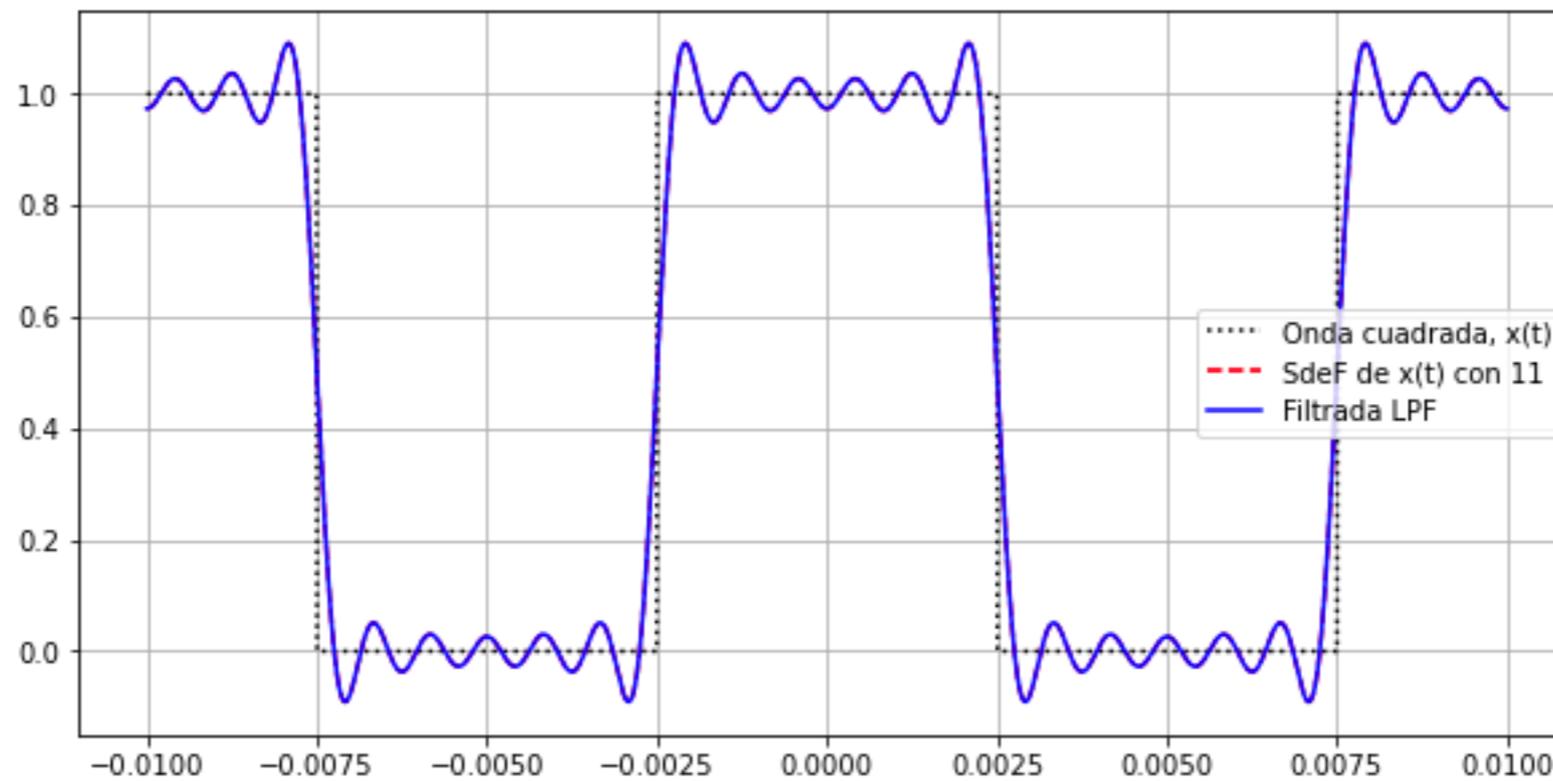
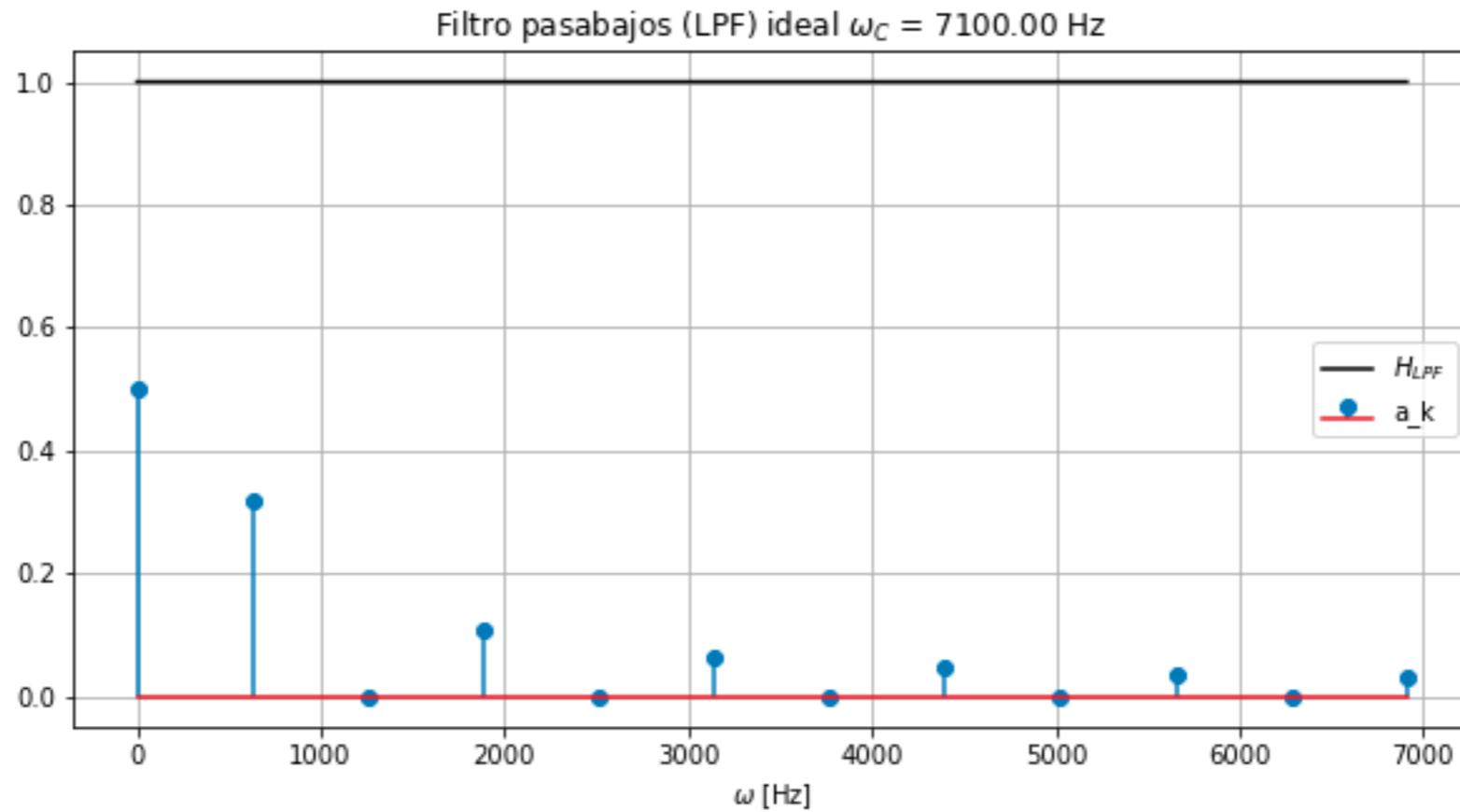
$$\Lambda \left(\frac{t}{\tau} \right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\alpha t} = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta \left(t - k \frac{2\pi}{\alpha} \right), \text{ F\u00f3rmula de Poisson}$$

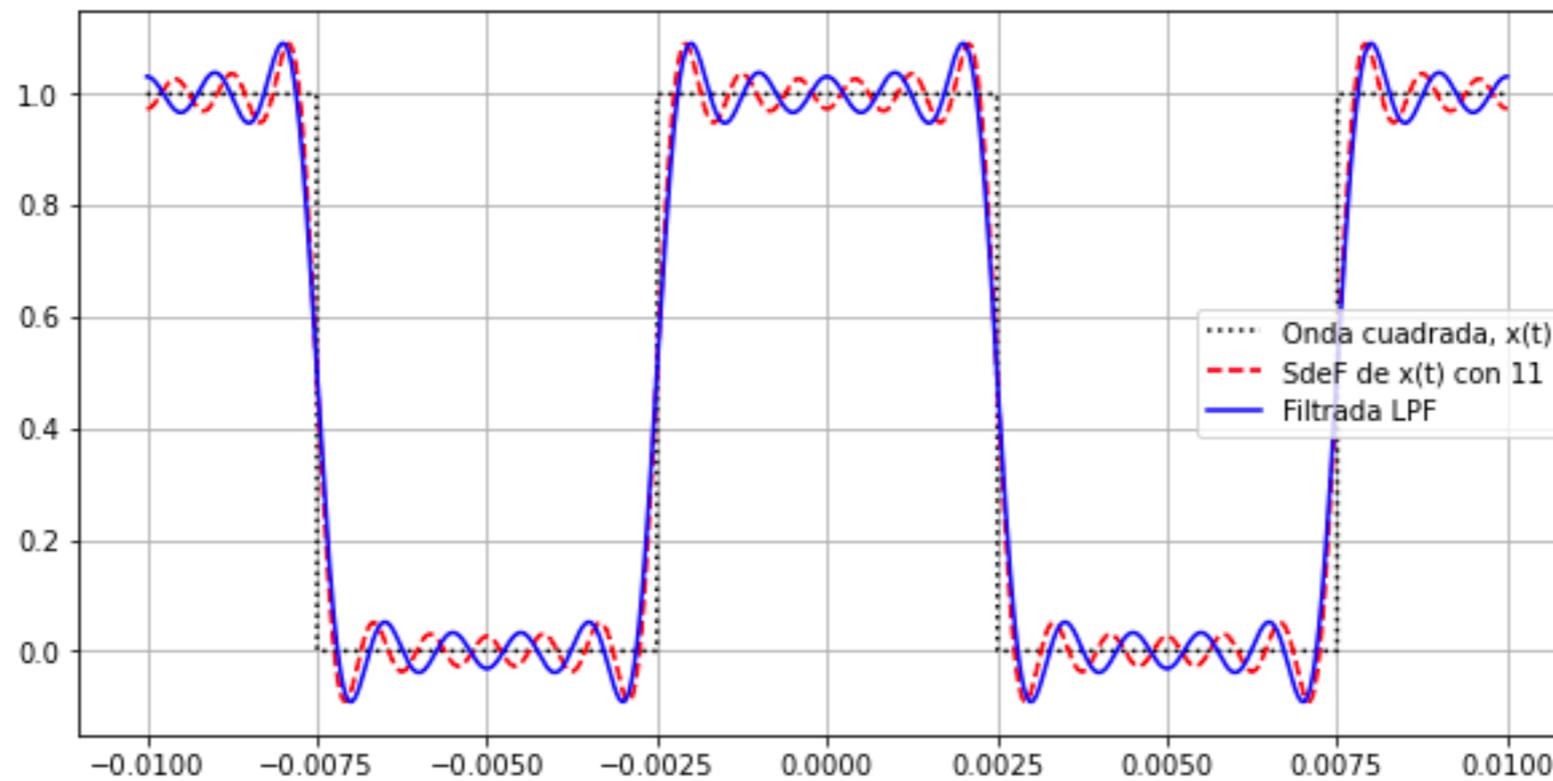
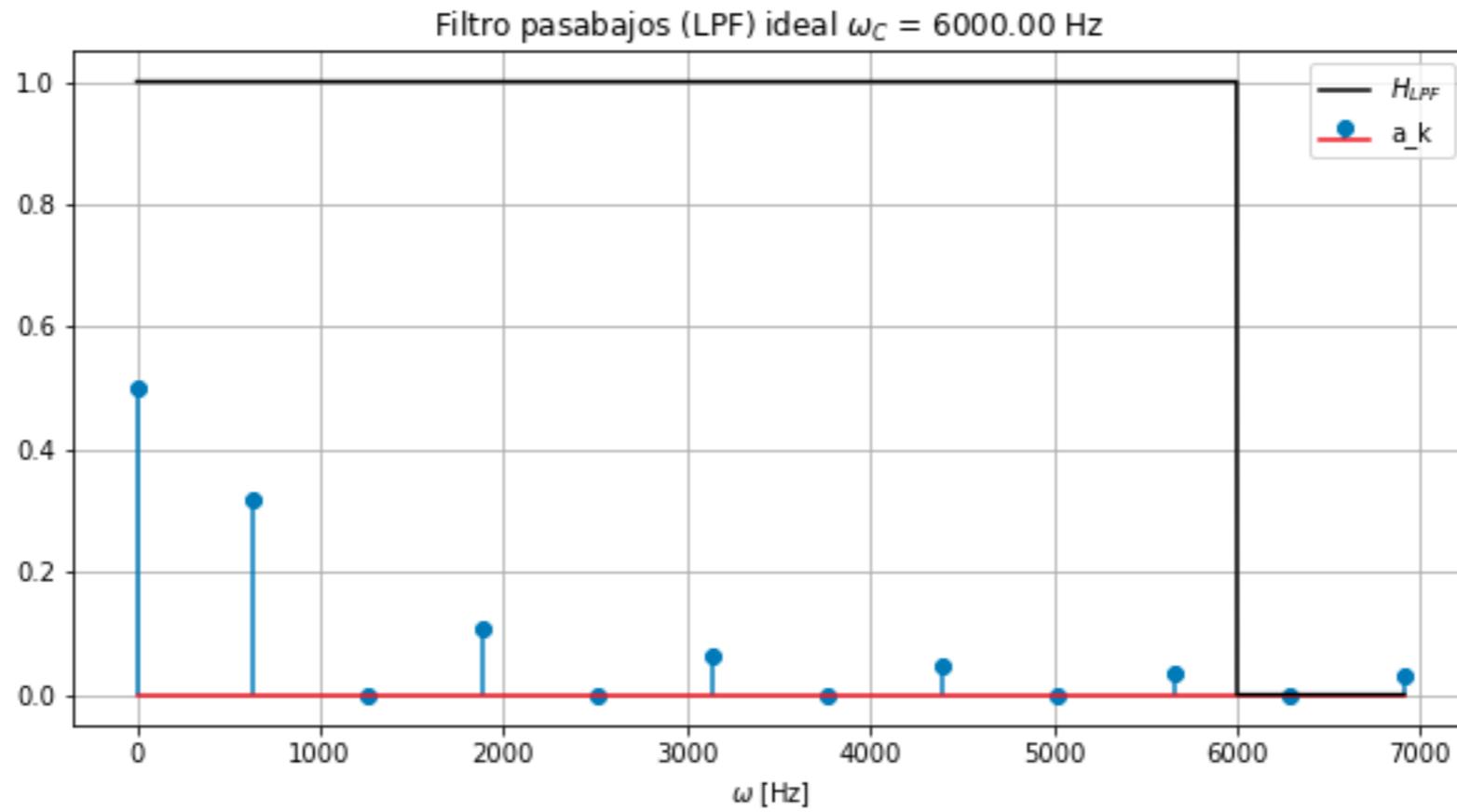
$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha^k = \alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}$$

← Hoja de f\u00f3rmulas (EVA/seys)

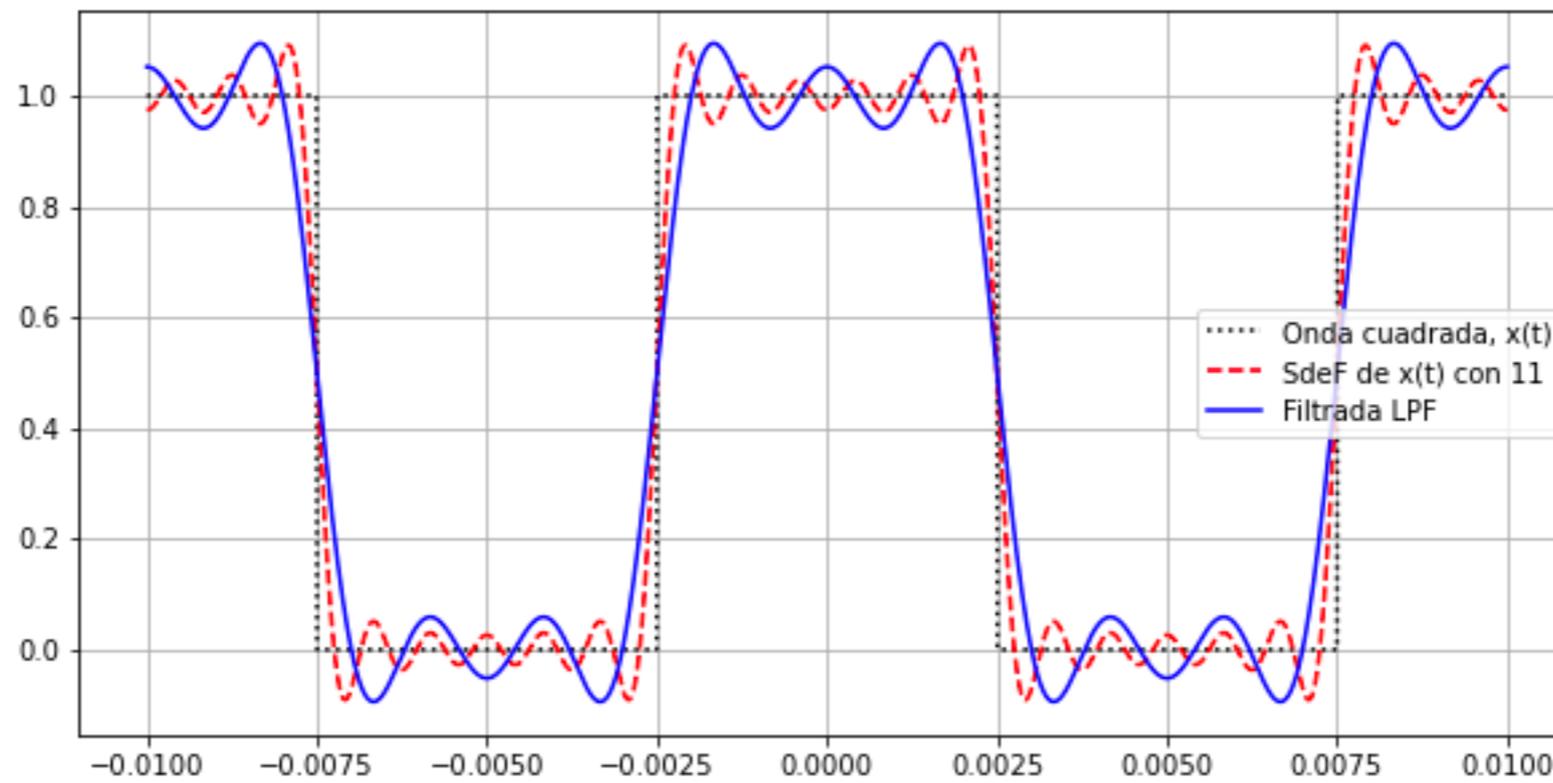
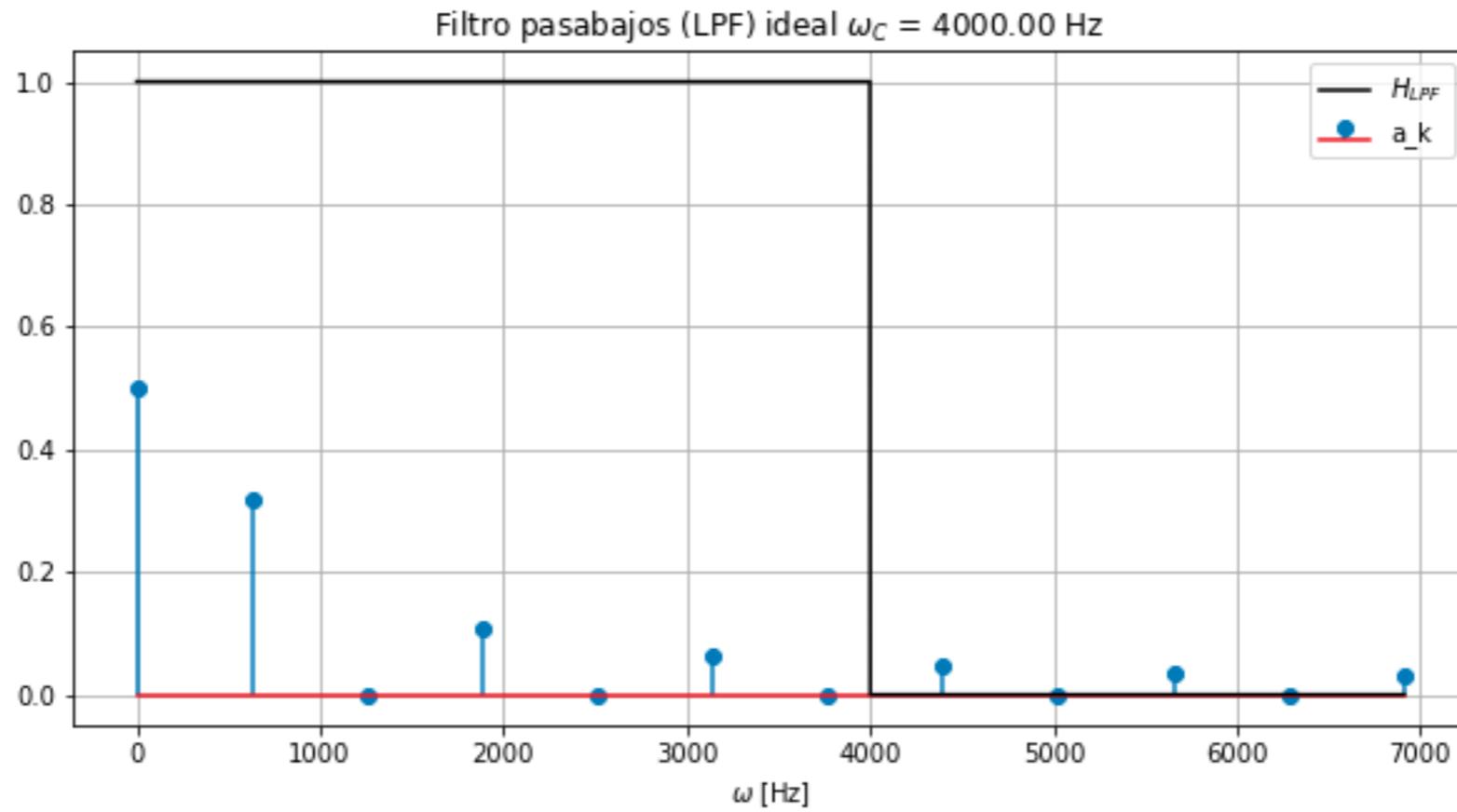
Serie de Fourier: Filtrado



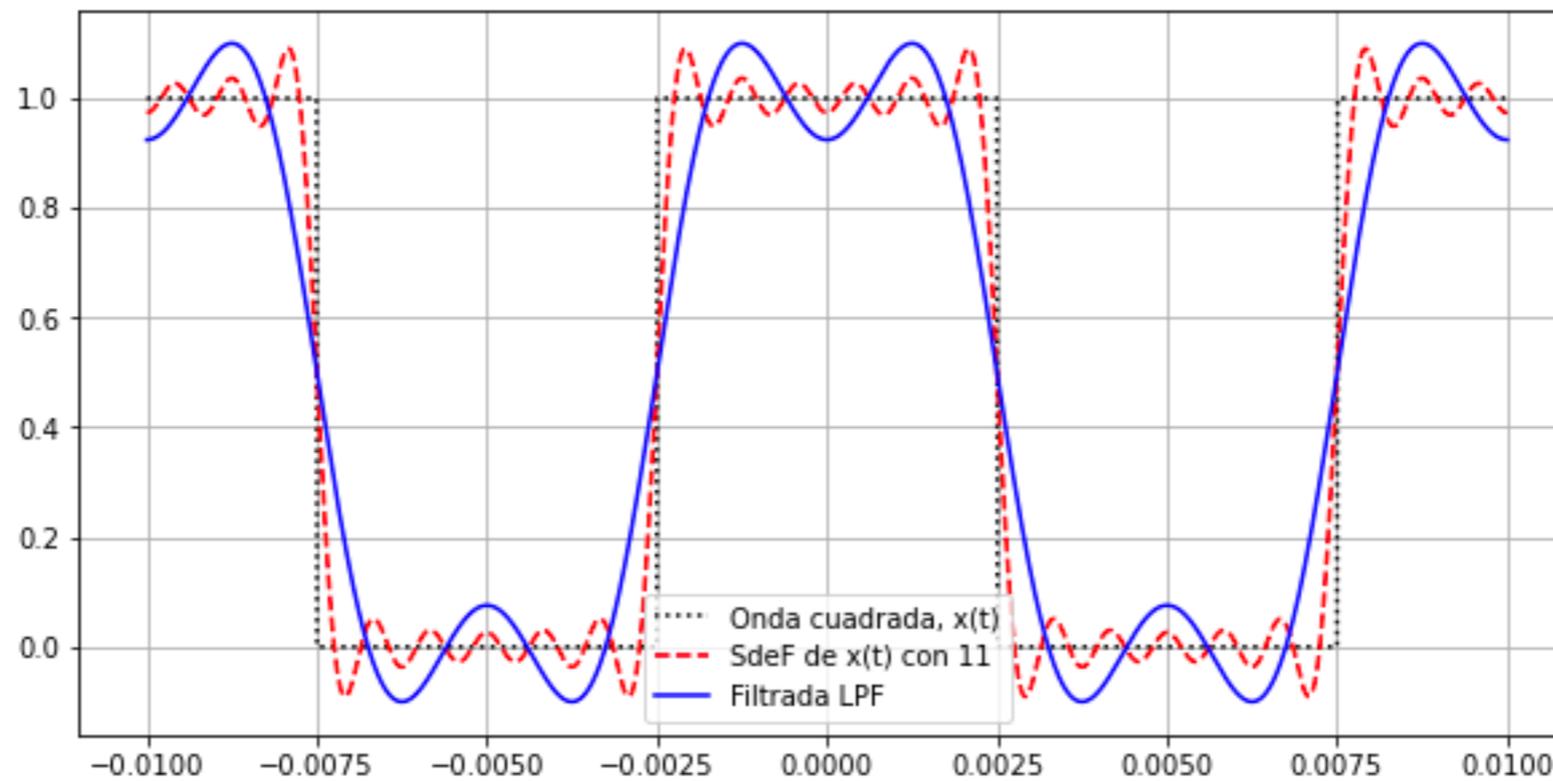
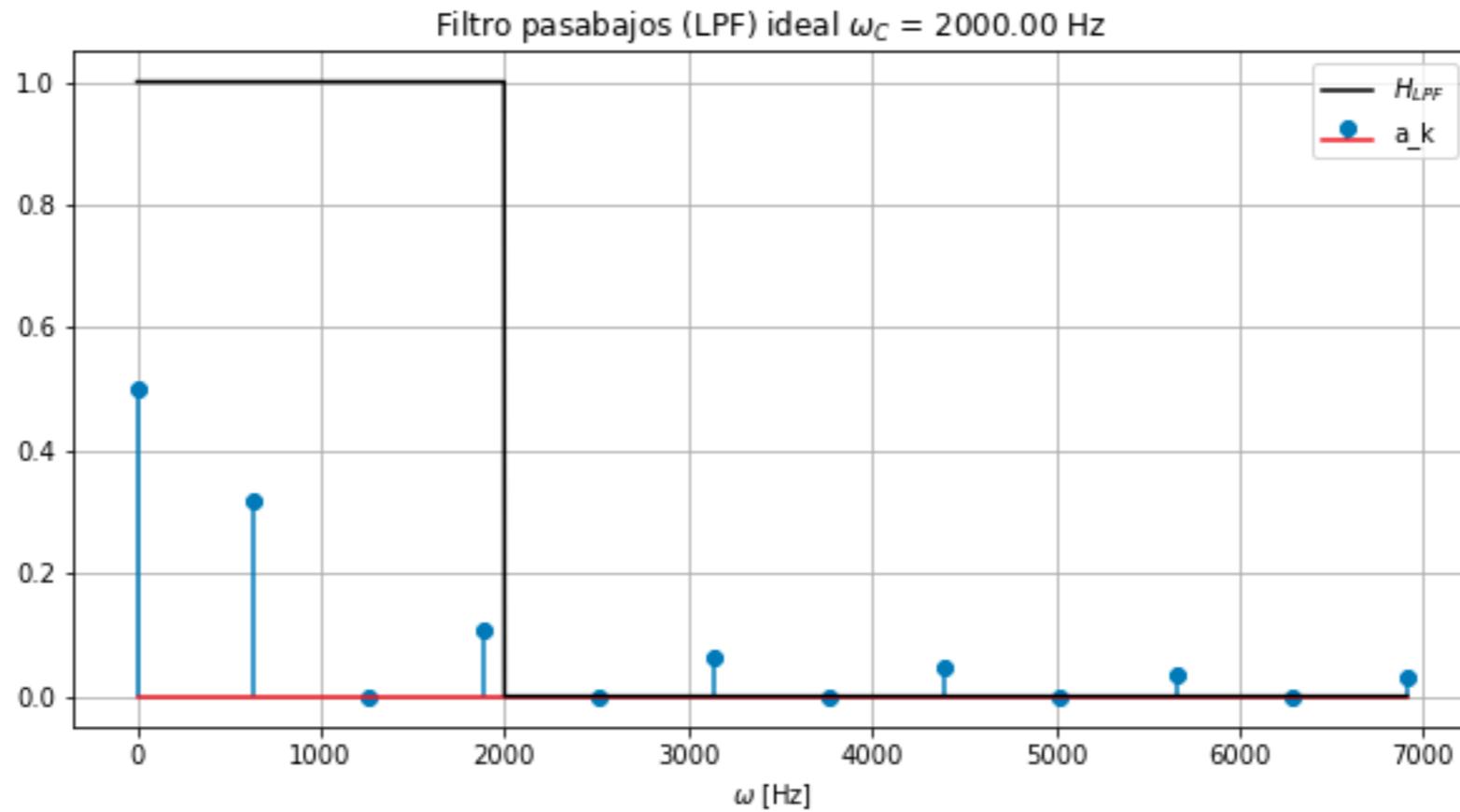
Serie de Fourier: Filtrado



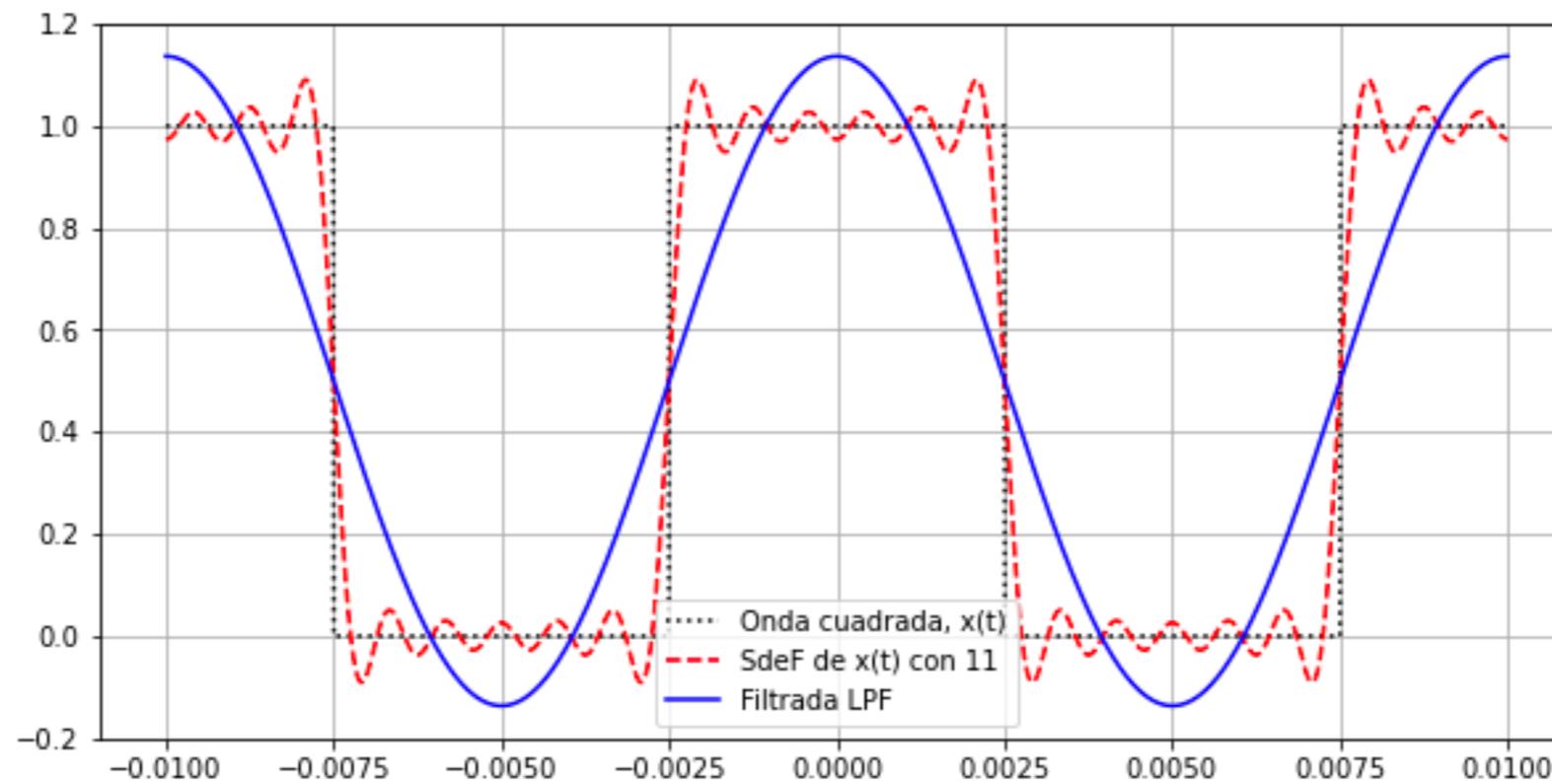
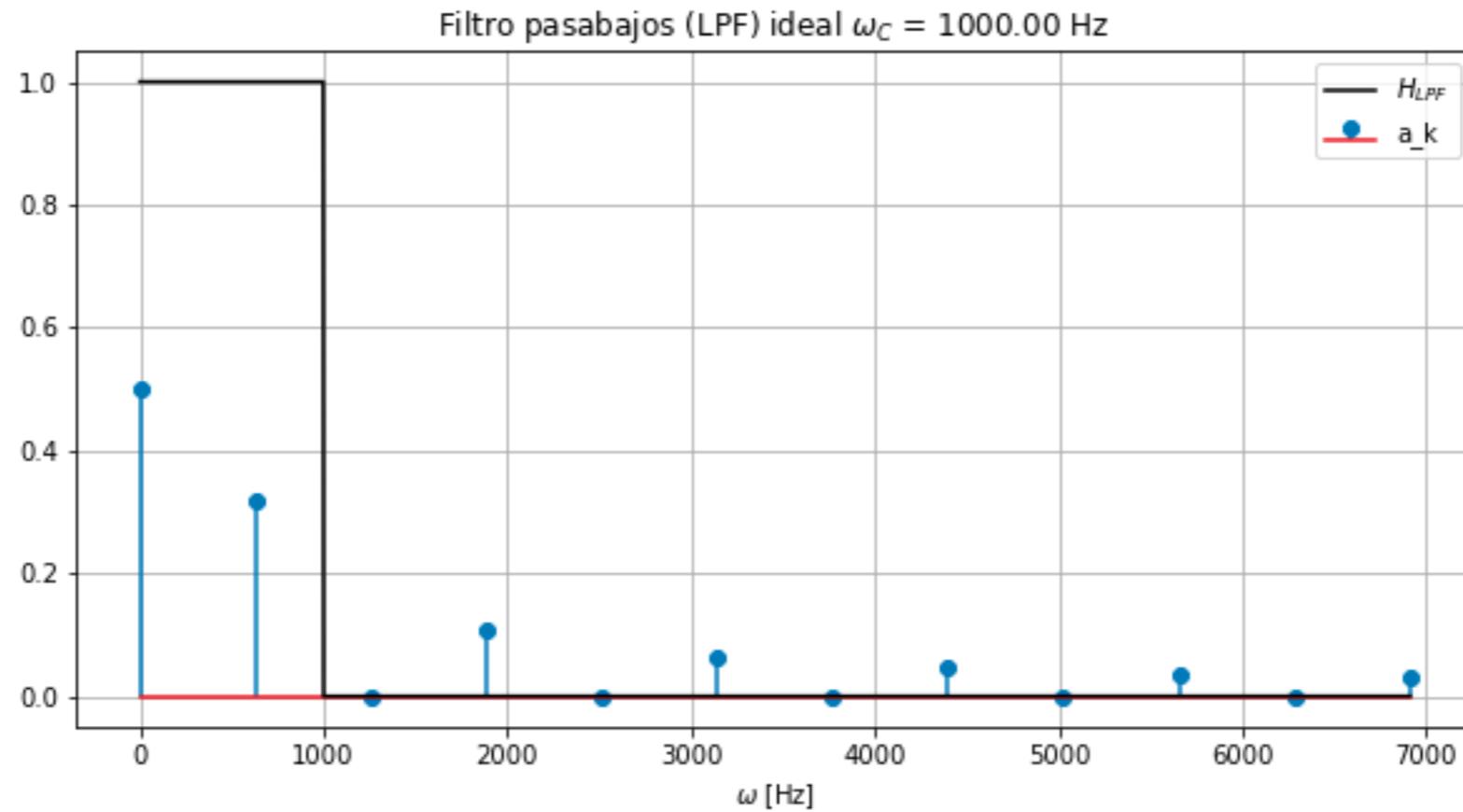
Serie de Fourier: Filtrado



Serie de Fourier: Filtrado



Serie de Fourier: Filtrado



Serie de Fourier: variable discreta

- Lo visto anteriormente también vale para variable discreta con algunas consideraciones.

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \xrightarrow{H} y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

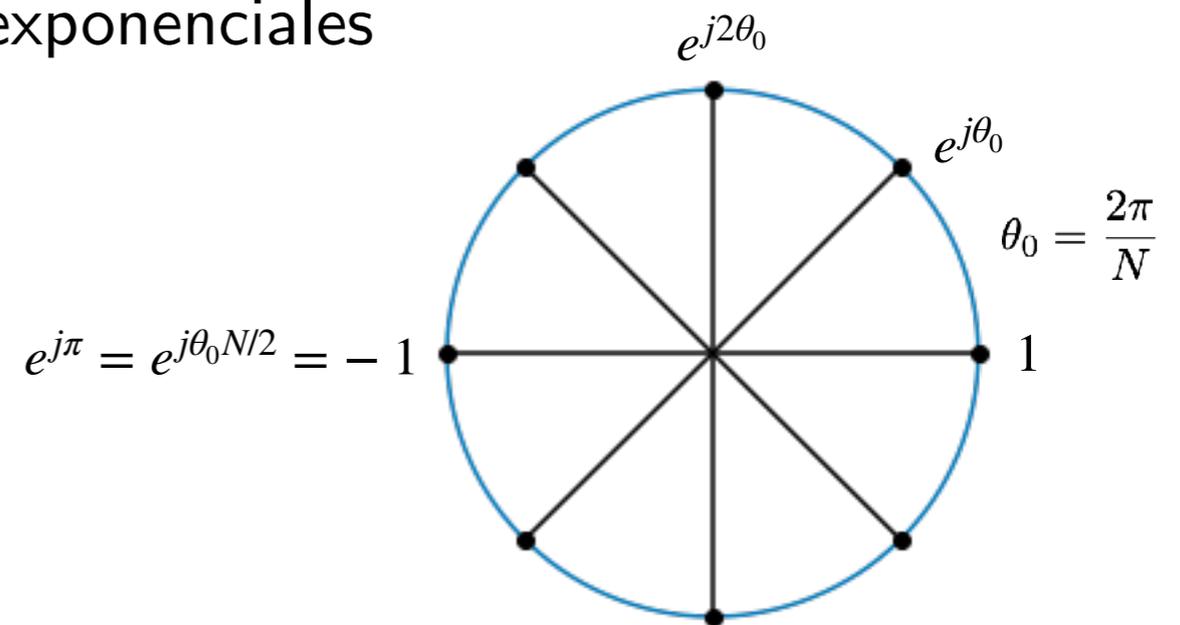
- Para señales periódicas de período N

$$x[m + N] = x[m] \quad \forall m$$

- Y se agrega la periodicidad de la base de exponenciales

$$e^{j(\theta_0 + 2\pi)n} = e^{jn\theta_0} \quad \forall \theta_0$$

$$e^{j(m+N)\theta_0} = e^{jm\theta_0} \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}$$



Serie de Fourier: variable discreta

- Para señales periódicas de período N la representación de $x[n]$ en Series de Fourier queda

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\theta_0 n} \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N} \quad \text{Síntesis}$$

Serie de Fourier
(de tiempo discreto)

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\theta_0 n} \quad \text{Análisis}$$

- Notar que $a_k = a_{(k+N)}$
- Nuevamente vale el producto interno

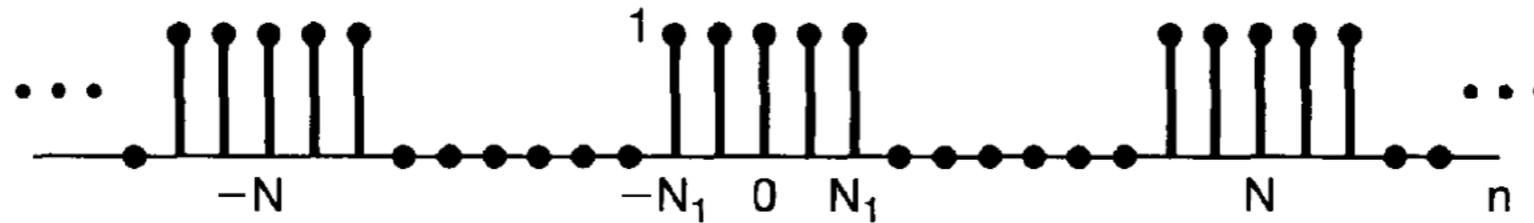
$$\langle x[n], y[n] \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y^*[k]$$

$$\langle e^{jl\theta_0 n}, e^{jk\theta_0 n} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(l-k)\theta_0 n} = \begin{cases} 1, & l = k + mN \\ 0, & l \neq k + mN \end{cases}$$

Base ortonormal ←

Serie de Fourier: variable discreta

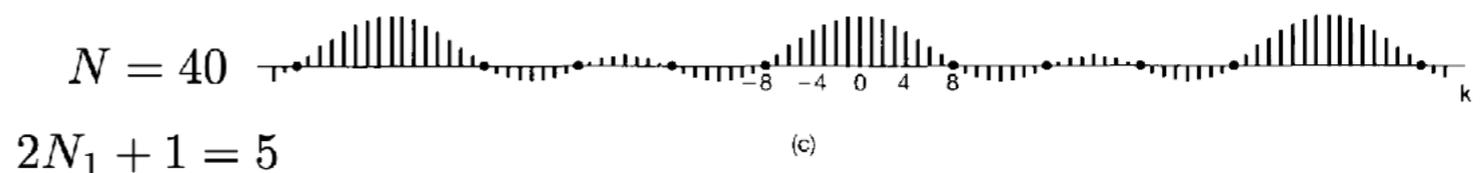
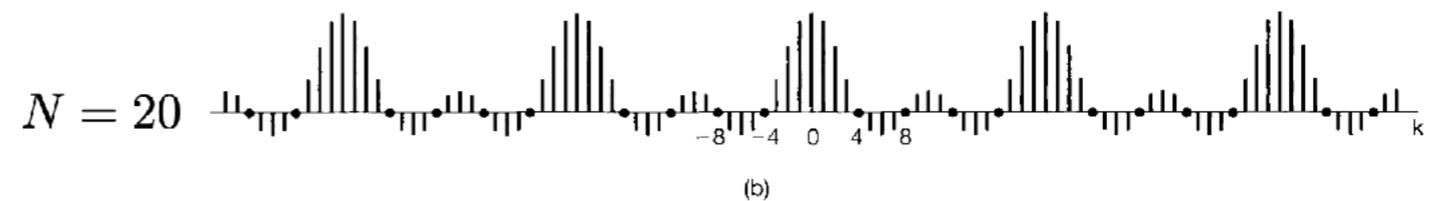
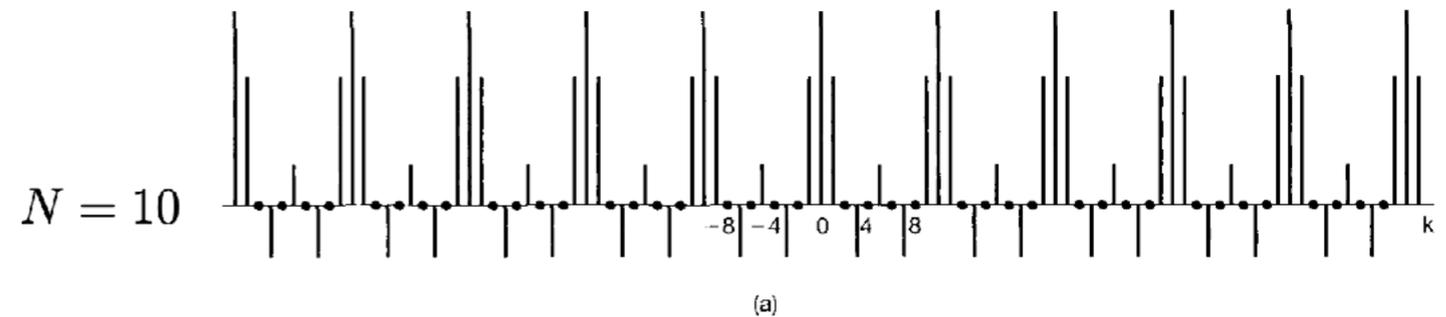
- Ejemplo 3.12 (p220)



$$x[n] = 1, -N_1 \leq n \leq N_1 \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\theta_0 n} \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(2\pi k \frac{(N_1 + 1/2)}{N}\right)}{\sin(\pi k / N)}$$



Serie de Fourier: Identidad de Parseval

- Relaciona la potencia calculada en el tiempo o en frecuencia

Variable continua $\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(\tau)|^2 d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$

Variable discreta $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$



Marc-Antoine
Parseval des
Chênes
(1755 - 1836)

Serie de Fourier: propiedades

• $x(t) \xleftrightarrow{\text{SF}} a_k$
 $y(t) \xleftrightarrow{\text{SF}} b_k$ periódicas de período T , $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Módulo y fase 

Linearity	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Frequency Shifting		$e^{jM\omega_0 t} = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	a_{k-M}
Conjugation	3.5.6	$x^*(t)$	a_{-k}^*
Time Reversal	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Time Scaling	3.5.4	$x(\alpha t), \alpha > 0$ (periodic with period T/α)	a_k
Periodic Convolution		$\int_T x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$T a_k b_k$
Multiplication	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
Differentiation		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk \frac{2\pi}{T} a_k$
Integration		$\int_{-\infty}^t x(t) dt$ (finite valued and periodic only if $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right) a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right) a_k$

Serie de Fourier: propiedades

- $x[n] \xleftrightarrow{\text{SF}} a_k$
 $y[n] \xleftrightarrow{\text{SF}} b_k$
- periódicas de período N , $\theta_0 = \frac{2\pi}{N}$; a_k y b_k periódicas N .

Linearity	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Frequency Shifting	$e^{jM(2\pi/N)n} x[n]$	a_{k-M}
Conjugation	$x^*[n]$	a_{-k}^*
Time Reversal	$x[-n]$	a_{-k}
Time Scaling	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{if } n \text{ is a multiple of } m \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } m \end{cases}$ (periodic with period mN)	$\frac{1}{m} a_k \begin{pmatrix} \text{viewed as periodic} \\ \text{with period } mN \end{pmatrix}$
Periodic Convolution	$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
Multiplication	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$
First Difference	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$

* Notación $\omega_0 = \theta_0 = \frac{2\pi}{N}$