Variables aleatorias

Realizamos un experimento

→ espacio muestral Ω: conjunto de todos los resultados posibles

→ función de probabilidad: P: Eventos $\to [0,1]$

Una variable aleatoria es una función

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

a partir de una variable aleatoria podemos definir eventos

$$X = \alpha \longleftrightarrow \{\omega \in \Omega : X(\omega) = \alpha\}$$

$$X \leq \alpha \longleftrightarrow \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\}$$

Ejemplo

Tirar una moneda dos veces

$$\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ cuenta la cantidad de veces que salió cara

$$X(CC) = 2 \quad X(CX) = 1 \quad X(XC) = 1 \quad X(XX) = 0$$

X toma valores en el conjunto $\{0,1,2\} \to X$ es una variable aleatoria discreta

• función de probabilidad puntual (fpp)

$$P_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

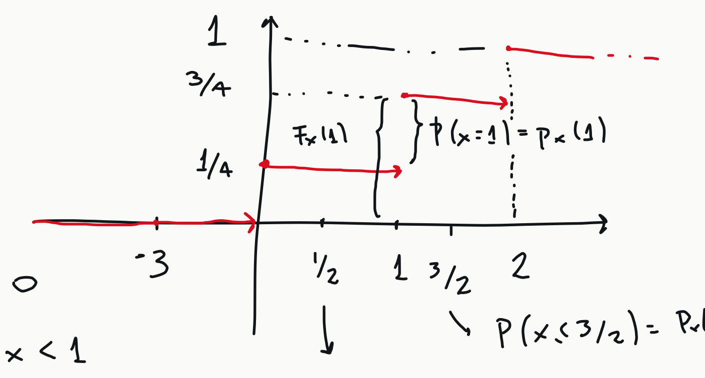
→ en el ejemplo

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x = 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1/4 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

* función de distribución acumulada (fda)

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$



→ en el ejemplo

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$P(X \leq 3/2) = P_X(0) + P_X(1)$

$P(X \leq 1/2) = F_X(1/2) = 1/4$

$F_X(10) = P(X \leq 10) = 1$

Propiedades de una función de distribución

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

3. F_X es creciente: si $x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$

   si $x \leq y \Rightarrow \{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$

   $P(\{X \leq x\}) \leq P(\{X \leq y\})$

   $F_X(x) \leq F_X(y)$

4. F_X es continua por derecha: $\lim\limits_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

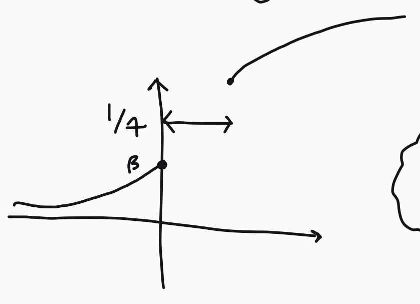
2.1)

$$F(x) = \begin{cases} \beta e^x & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \alpha \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \alpha \dfrac{x}{1+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \alpha \overbrace{\dfrac{1}{\frac{1}{x}+1}}^{\to 1} = \alpha = 1$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{\beta e^x}_{\to 0} = 0$

- F creciente

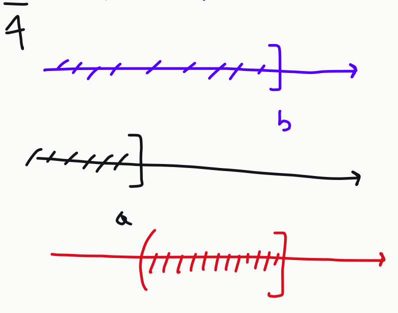


$$\boxed{\beta \leq 1/4}$$

- F cont. por derecha $\begin{cases} \text{en } 1 & \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{1}{2} = F(1) = \dfrac{1}{1+1} \\ \text{en } 0 & \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} = F(0) = \beta \to \beta = 1/4 \end{cases}$

3_

a) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$



$\{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}$

$P(\{a < X \leq b\}) = P(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\})$

$\{X \leq a\} \subseteq \{X \leq b\}$

$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$

b) $P(X = a) = \underbrace{F_X(a)}_{P(X \leq a)} - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

$\{X = a\} = \{X \leq a\} \setminus \{X < a\}$

$P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a)$

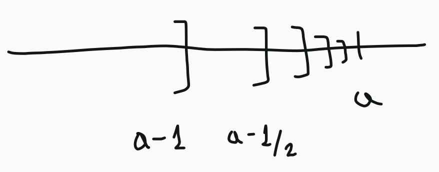
$P(X < a) = \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

teorema de continuidad de la probabilidad

sea $\{A_n\}$ una sucesión creciente de eventos

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$$

entonces $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$



$\{X < a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{X \leq a - 1/n\}$

$A_1 = \{X \leq a - 1\}$

$A_2 = \{X \leq a - 1/2\}$

$A_3 = \{X \leq a - 1/3\}$

$\vdots$

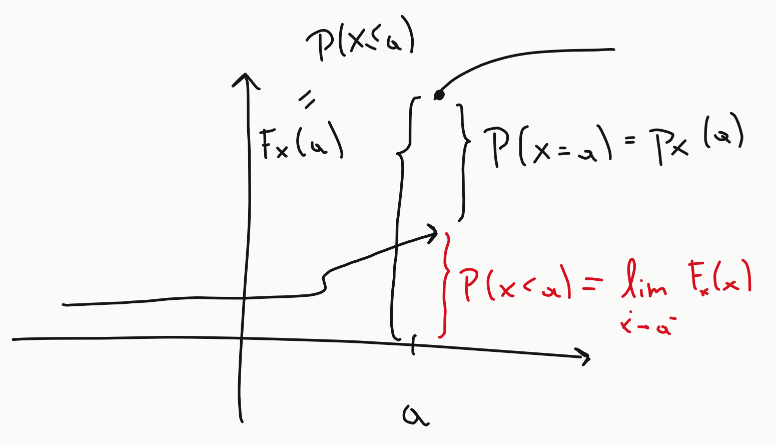
$A_n = \{X \leq a - 1/n\}$

$P(X < a) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{X \leq a - 1/n\}\right)$

teo. de cont.

$P(X < a) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(\{X \leq a - 1/n\}) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_X(a - 1/n) = \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

$P(X < a) = \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$



$P(X = a) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

$P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) \to P(X \leq a) = P(X = a) + P(X < a)$