

Distribucion geometrica

→ Tenemos un experimento con probabilidad de éxito p

→ Repetimos el experimento hasta obtener el primer éxito

X cuenta las veces que repetimos el experimento

X toma valores $\{1, 2, \dots\}$

sea $K \in \{1, 2, \dots\}$

$$p_X(K) = P(X=K) = (1-p)^{K-1} p$$

$$X \sim \text{Geo}(p)$$

Vamos a verificar que p_X es efectivamente una fpp

$$* p_X(K) \geq 0 \quad \forall K$$

$$* \sum_{k=1}^{\infty} p_X(K) = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_X(K) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{1-1+p} = \frac{p}{p} = 1$$

serie geometrica $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ $|r| < 1$

Probar que $\forall m, n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$P(X > m+n | X > m) = P(X > n)$$

es decir, si en el paso m no tuvimos éxito, es como que empezaramos nuevamente

$$\underbrace{\underbrace{F \ F \ F \ \dots \ F \ F \ \dots \ E}_{m+n \text{ intentos}}}_{m \text{ intentos}} \quad P(X > m+n | X > m)$$

$$\underbrace{F \ F \ F \ \dots \ E}_{n \text{ intentos}} \quad P(X > n)$$

$$P(X > m+n | X > m) = P(X > n)$$

$$P(X > m+n | X > m) = \frac{P(\{X > m+n\} \cap \{X > m\})}{P(X > m)} = \frac{P(X > m+n)}{P(X > m)}$$

Vamos a calcular $P(X > t)$ con $t \in \{1, 2, \dots\}$

$$P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \sum_{k=1}^t p_X(k)$$

$$P(X \leq t) = \underbrace{P(X=1)}_{p_X(1)} + \underbrace{P(X=2)}_{p_X(2)} + \dots + \underbrace{P(X=t)}_{p_X(t)} = \sum_{k=1}^t p_X(k)$$

$$P(X > t) = 1 - \sum_{k=1}^t (1-p)^{k-1} p = 1 - p \sum_{k=1}^t (1-p)^{k-1} = 1 - p \sum_{i=0}^{t-1} (1-p)^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{1-r^n}{1-r} \quad = 1 - p \frac{1-(1-p)^t}{1-(1-p)} = 1 - \frac{p(1-(1-p)^t)}{p}$$

$$= 1 - \frac{p(1-(1-p)^t)}{p} = 1 - (1 - (1-p)^t) = \frac{(1-p)^t}{1} = P(X > t)$$

$$P(X > m+n | X > m) = \frac{P(X > m+n)}{P(X > m)} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n = P(X > n)$$

11.3) X = cuenta la cantidad de intentos
 $X \sim \text{Geo}(0.05) \rightarrow p_X(K) = (0.95)^{K-1} 0.05$

$$P(X=5) = p_X(5) = (0.95)^4 0.05$$

Distribucion de Poisson

esperamos el bus entre las 3 y las 4



X = cantidad de veces que pasa el bus

$\lambda =$ " " en promedio

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ X toma valores entre $\{0, 1, \dots\}$

$$p_X(K) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}$$

veamos que es una fpp $* p_X(K) \geq 0 \quad \forall K$

$$* \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

10.1) X = cantidad de partículas que pasan $\left\{ \begin{array}{l} P(X=6) = p_X(6) = e^{-4} \frac{4^6}{6!} \\ X \sim \text{Poisson}(4) \rightarrow p_X(k) = e^{-4} \frac{4^k}{k!} \end{array} \right.$

10.3) X = cantidad de sectores defectuosos
 $X \sim \text{Poisson}(0.1) \rightarrow p_X(k) = e^{-0.1} (0.1)^k / k!$

a) $P(X=0) = p_X(0) = e^{-0.1} \frac{(0.1)^0}{0!} = e^{-0.1}$

b) $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X=1) - P(X=0)$
 $= 1 - e^{-0.1} (0.1) - e^{-0.1}$

c) $P(X=0) \cdot P(X=0) = e^{-0.2}$

inspeccionamos 3 discos, prob. de que por lo menos 1 no sea defectuoso

Y = cuenta de defectuosos

$$Y \sim \text{Bin}(3, P(X=0) = e^{-0.1}) \rightarrow p_Y(k) = C_3^k (e^{-0.1})^k (1 - e^{-0.1})^{3-k}$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1 - e^{-0.1})^3$$

Binomial negativa

X = numero de intentos hasta observar el suceso por K -ésima vez

$$X \sim \text{BN}(K, p)$$

$$P(X=n) = p_X(n) = C_{n-1}^{K-1} (1-p)^{n-K} p^K$$

12.2) $\left. \begin{array}{l} 10000 \text{ personas} \\ 1200 \text{ enfermos} \end{array} \right\} p = 0.012$

X = numero de muestras

$$X \sim \text{BN}(4, 0.012) \rightarrow p_X(n) = C_3^{n-1} (0.012)^4 (0.988)^{n-4}$$

$$P(X \leq 8) = \sum_{n=4}^8 C_3^{n-1} (0.012)^4 (0.988)^{n-4}$$