Grafos localmente más separables

Coloquio mensual del IMERL.
Facultad de Ingeniería. Universidad de la República.

Pablo Romero

Martes 25 de marzo de 2025. Montevideo, Uruguay.

Grafos simples y subgrafos recubridores

Definición 1.

*Un **grafo simple** G consta de dos conjuntos:*

- *un conjunto cuyos elementos se llaman **vértices**, y*
- *una colección de pares de vértices que se llaman **aristas**.*

Usaremos los símbolos $V(G)$ y $E(G)$ para denotar al conjunto de vértices y de aristas de G, respectivamente.

Definición 2.

*Sea G un grafo simple. Un **subgrafo de G** es un grafo simple H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. El subgrafo H de G es **recubridor** si cumple que $V(H) = V(G)$.*

Diremos que v y w son vértices **adyacentes** en G si $\{v, w\}$ es una arista de G. El **grado** de un vértice v de G es la cantidad de vértices adyacentes a v en G.

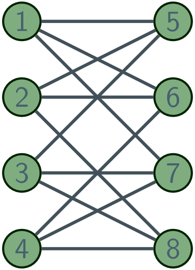
Isomorfismo entre dos grafos simples

Definición 3.

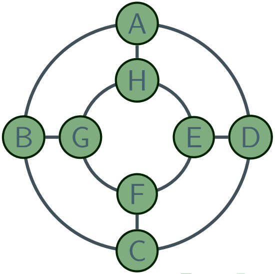
*Dos grafos simples G y H son **isomorfos** si existe alguna función biyectiva $\varphi : V(G) \to V(H)$ tal que v y w son adyacentes en G si y sólo si $\varphi(v)$ y $\varphi(w)$ son adyacentes en H.*

Ejercicio 1.

Probar que los grafos G y H son isomorfos.



G



H

Grafos simples conexos

Definición 4.

Sea n un entero positivo. El ***grafo camino de n vértices****, que denotamos P_n, tiene como conjunto de vértices a $\{1, 2, \ldots, n\}$ y como conjunto de aristas a $\{\{i, i+1\} : i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\}$. Los* ***extremos del camino*** *P_n son sus vértices 1 y n.*

Definición 5.

Sea G un grafo simple. Dados dos vértices u y v, denotamos $u \sim v$ cuando existe algún subgrafo de G isomorfo a P_r para algún entero positivo r cuyos extremos son u y v. La relación $\sim$ es de equivalencia en $V(G)$, y la cantidad de clases de equivalencia que define se denota mediante $\kappa(G)$.

Definición 6.

Un grafo simple G es ***conexo*** *si $\kappa(G) = 1$.*

Diámetro de grafos simples conexos

Definición 7.

Para cada entero positivo n definimos la longitud del grafo P_n como $n-1$. Sea G es un grafo simple conexo y sean u y v son vértices de G. La ***distancia entre u y v en G*** *es la mínima longitud dentro de todos los caminos cuyos extremos son u y v, y se denota $d_G(u,v)$.*

Definición 8.

Sea G un grafo finito simple conexo y no vacío. El ***diámetro de G*** *es la máxima distancia entre todos los vértices de G.*

Árboles

Definición 9.

*Sea n un entero tal que $n \geq 3$. El **grafo n-ciclo**, que denotamos C_n, tiene exactamente n vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$ y su conjunto de aristas es $\{\{(i, i+1)\} : i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\} \cup \{1, n\}$.*

Diremos que un grafo simple no tiene ciclos si ninguno de sus subgrafos es isomorfo a un n-ciclo.

Definición 10.

*Un **árbol** es un grafo simple conexo que no tiene ciclos.*

Lema 1.

Sea n un entero positivo. Cada árbol con n vértices tiene exactamente $n-1$ aristas.

Una clase finita de grafos conexos

Definición 11.

*Sea n un entero positivo. El **grafo completo de n vértices**, que denotamos K_n, consta de exactamente n vértices y además cada par de vértices es adyacente.*

Definición 12.

Sean n y m dos enteros positivos tales que $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$. Sea $\mathcal{F}_{n,m}$ la colección de subgrafos recubridores simples y conexos de K_n con m aristas. Equipemos a $\mathcal{F}_{n,m}$ con la relación de isomorfismo, que es de equivalencia. El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{C}_{n,m}}$ consta de un miembro de cada clase de equivalencia de $\mathcal{F}_{n,m}$.

Grafos simples y conexos con 2 terminales

Definición 13.

Un ***grafo simple conexo con 2 terminales*** *es un grafo simple conexo G que tiene dos vértices distinguidos, que son* ***terminales****.*

Definición 14.

Si G y H son grafos simples y conexos con 2 terminales, diremos que G y H son ***isomorfos*** *si existe algún isomorfismo φ entre los grafos simples G y H que deja invariante el conjunto de terminales.*

Definición 15.

Para cada par de enteros n y m tales que $n \geq 2$ y $n-1 \leq m \leq \binom{n}{2}$, definimos la colección $\mathcal{L}_{n,m}$ de subgrafos recubridores simples y conexos de K_n equipados con 2 terminales. El conjunto $\boldsymbol{T_{n,m}}$ consta de un miembro de cada clase de isomorfismo de $\mathcal{L}_{n,m}$.

Construcción de grafos aleatorios

Vamos a construir, para cada grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ y cada número real p en $[0,1]$, una medida de probabilidad:

- Definimos un subconjunto aleatorio de aristas E_p de $E(G)$ como sigue. Cada arista de $E(G)$ se incluye en E_p en forma independiente con probabilidad p.
- Definimos el subgrafo recubridor aleatorio G_p de G, cuyo conjunto de vértices es $V(G)$ y su conjunto de aristas es E_p.

Es posible construir una medida de probabilidad en $\Omega = \mathcal{P}(E)$ extendiendo por aditividad finita a la probabilidad puntual $\mathbb{P}$ tal que $\mathbb{P}(U) = p^{|U|}(1-p)^{m-|U|}$ para cada subconjunto U de E. Dicha medida de probabilidad induce una medida de probabilidad de grafos aleatorios recubridores G_p de G.

Confiabilidad de un grafo

Definición 16 (Confiabilidad de un grafo [5]).

Para cada número real p en $[0,1]$ y cada grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$, ***la confiabilidad de G evaluada en p*** *es la probabilidad de que el subgrafo aleatorio G_p de G sea conexo, es decir, $\mathbb{P}(\kappa(G_p) = 1)$.*

Si denotamos $R_G(p)$ a la confiabilidad de G evaluada en p y para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ denotamos $n_i(G)$ la cantidad de subgrafos recubridores conexos de G con exactamente i aristas, entonces:

$$R_G(p) = \sum_{i=n-1}^{m} n_i(G) p^i (1-p)^{m-i}.$$

Separabilidad de un grafo con 2 terminales

Definición 17 (Brown y Mol [4]).

Para cada número real p en $[0,1]$ y cada grafo G en $T_{n,m}$ con terminales s y t, ***la separabilidad de G evaluada en p****, $S_G(p)$, es la probabilidad de que el subgrafo aleatorio G_p de G tenga exactamente 2 componentes conexas tales que una de ellas incluye al terminal s y la otra incluye al terminal t, es decir,* $S_G(p) = \mathbb{P}(G_p = G_1 \cup G_2,\ \kappa(G_1) = \kappa(G_2) = 1,\ s \in G_1\ t \in G_2)$.

Un **separador de G** es un subconjunto U de $E(G)$ tal que $G - U$ tiene dos componentes conexas, cada una de ellas con un terminal de G. Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, sea $F_i(G)$ la cantidad de separadores de G con exactamente i aristas. Entonces:

$$S_G(p) = \sum_{i=1}^{m} F_i(G) p^{m-i} (1-p)^i.$$

Grafos con dos terminales equivalentes

Definición 18.

*Dos grafos G y H en $T_{n,m}$ son **equivalentes** si para todo número real p en $[0,1]$ se cumple que $S_G(p) = S_H(p)$.*

Para cada G en $T_{n,m}$ definimos $F(G) = (F_1(G), \ldots, F_m(G))$.

Ejercicio 2.

Probar que los polinomios de Bernstein $\{b_{n,i}(x), i \in \{0, 1, \ldots, n\}\}$ dados por $b_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$ definen una base del espacio vectorial de polinomios de grado n o menos.

Observación

Dos grafos G y H en $T_{n,m}$ son equivalentes si y sólo si $F(G) = F(H)$.

Grafos localmente y uniformemente más separables

Definición 19 (Grafos localmente más separables).

Sea G un grafo en $T_{n,m}$. Diremos que G es un ***grafo localmente más separable*** *si existe algún número real positivo δ tal que para cada grafo H en $T_{n,m}$ y cada p en $(1-\delta, 1)$ se cumple que $S_G(p) \geq S_H(p)$.*

Definición 20 (Grafos uniformemente más separables).

Sea G un grafo en $T_{n,m}$. Diremos que G es un ***grafo uniformemente más separable*** *si para cada grafo H en $T_{n,m}$ y para cada p en $[0, 1]$ se cumple que $S_G(p) \geq S_H(p)$.*

Ejercicio 3.

Probar que, para cada $n \geq 2$, el grafo P_n cuyos extremos son terminales es uniformemente más separable en $T_{n,n-1}$.

Grafo globo

Definición 21 (Petingi et al. [6]).

Consideremos los dos conjuntos de índices I e I_0:

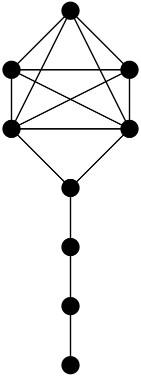
$$I = \{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 : n \geq 4,\ n \leq m \leq \binom{n}{2}\},$$

$$I_0 = \{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 : n \geq 4,\ \binom{n-1}{2} + 2 \leq m \leq \binom{n}{2}\}.$$

Para cada (n,m) en I se define el ***grafo globo*** *$B_{n,m}$ como sigue:*

- *Si $(n,m) \in I_0$ entonces $B_{n,m}$ consiste en K_{n-1} y un vértice v conectado a $m - \binom{n-1}{2}$ vértices de K_{n-1}.*
- *Si $(n,m) = (4,4)$ entonces $B_{n,m}$ es K_3 y un vértice colgante.*
- *En otro caso, $B_{n,m}$ es $B_{n-1,m-1}$ más un vértice v colgante a algún vértice de grado mínimo en $B_{n-1,m-1}$.*

Ejemplo de grafo globo



$B_{9,15}$

Contexto Histórico

Publicaciones

- 1992: Brown y Colbourn [2] conjeturaron que para todo grafo simple G se cumple que las raíces del polinomio $R_G(p)$ están contenidas en el disco complejo cerrado de radio 1.
- 2004: Royle y Sokal [8] presentan contraejemplos a dicha conjetura.
- 2017: Brown y Mol [4] construyen nuevos contraejemplos. El concepto de separabilidad de un grafo con 2 terminales es esencial en su construcción.
- 2023: Brown y McMullin [3] estudian la existencia de multigrafos uniformemente más separables. Mencionan que la determinación de grafos uniformemente más separables en cada una de las clases no vacías de grafos $T_{n,m}$ es un problema abierto de interés para explorar.

Resultados principales

Definición 22.

Para cada (n, m) en I definimos el ***globo con terminales*** *$G_{n,m}$ en $T_{n,m}$ como el grafo $B_{n,m}$ equipado con dos terminales s y t cuya distancia alcanza el diámetro de $B_{n,m}$.*

Teorema 1 (Grafos localmente más separables).

Para cada (n, m) en I, sea $\mathcal{G}_{n,m}$ el conjunto que consiste en todos los grafos localmente más separables en $T_{n,m}$. Entonces, $\mathcal{G}_{n,m} = \{H : H \in T_{n,m}, F(H) = F(G_{n,m})\}$.

Teorema 2 (Grafos uniformemente más separables).

Para cada par de enteros n y m tales que $n \geq 7$ y $n \leq m \leq \binom{n-3}{2} + 3$, no existe ningún grafo uniformemente más separable en $T_{n,m}$.

Tres problemas de optimización combinatoria

Sea G un grafo en $\mathcal{C}_{n,m}$.

1. Un **puente de *G*** es una arista e de G tal que $G - e$ es no conexo. Sea $b(G)$ la cantidad de puentes de G.
2. La **arista conectividad de *G***, que denotamos $\lambda(G)$, es la menor cantidad de aristas que se deben eliminar a G para que deje de ser conexo.
3. Sea $t(G)$ la **cantidad de árboles recubridores de *G***.

Veremos que el grafo globo $B_{n,m}$ es, simultáneamente, solución de los 3 problemas de optimización combinatoria que siguen:

$$b(n,m) = \max\{b(G) : G \in \mathcal{C}_{n,m}\};$$
$$\lambda(n,m) = \min\{\lambda(G) : G \in \mathcal{C}_{n,m}\};$$
$$t(n,m) = \min\{t(G) : G \in \mathcal{C}_{n,m}\}.$$

Maximización del número de puentes

Lema 2 (Romero [7]).

Para cada par de enteros (n, m) *en* I *se cumple que* $b(n, m) = b(B_{n,m})$.

Definición 23.

El ***esqueleto de un grafo G*** *en* $\mathcal{C}_{n,m}$, *que denotamos* G', *es el grafo obtenido de* G *tras la contracción de todas sus aristas puente.*

Definamos el conjunto de grafos $\mathcal{B}_0$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{B}_0 = \{G : G \in \mathcal{C}_{n,m}, (n, m) \in I_0\}.$$

Lema 3.

Sea (n, m) *en* I. *Un grafo* G *en* $\mathcal{C}_{n,m}$ *tiene* $b(n, m)$ *puentes si y sólo si* $G' \in \mathcal{B}_0$.

Minimización de la arista conectividad

Para cada grafo G en $\mathcal{C}_{n,m}$ denotamos $\delta(G)$ el grado mínimo dentro de todos los vértices de G.

Lema 4.

Cada grafo G de $\mathcal{B}_0$ cumple que $\lambda(G) = \delta(G)$.

Proposición 1.

Para cada $(n, m) \in I$, $\lambda(n, m)$ satisface la siguiente expresión:

$$\lambda(n, m) = \begin{cases} m - \binom{n-1}{2}, \ si \ (n, m) \in I_0, \\ 1, \ si \ (n, m) \in I_1. \end{cases}$$

Además, si $(n, m) \in I_0$ entonces $B_{n,m}$ es el único grafo en $\mathcal{C}_{n,m}$ tal que $\lambda(B_{n,m}) = \lambda(n, m)$.

Minimización del número de árboles recubridores

Definición 24.

*El **grafo umbral** $H(n; d_1, d_2, \ldots, d_k)$ consiste en un grafo completo con vértices $v_{k+1}, \ldots, v_n$ más un conjunto de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de modo que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ el vértice v_i es adyacente a cada uno de los vértices $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{k+d_i}$.*

Teorema 3 (Fórmula de Bogdanowicz [1]).

El número de árboles de $H(n; d_1, d_2, \ldots, d_k)$ con $d_1 \geq d_2 \ldots \geq d_k$, $d_0 = n - k$ y $d_{k+1} = 1$ satisface la siguiente expresión:

$$t(H(n; d_1, d_2, \ldots, d_k)) = (n-k)^{-2} \prod_{i=0}^{k} \left(d_i (n-k+i)^{d_i - d_{i+1}} \right).$$

Teorema 4 (Bogdanowicz [1]).

Para cada (n, m) en I se cumple que $t(B_{n,m}) = t_{n,m}$.

Estudio de separabilidad local

Lema 5 (Brown y McMullin [3]).

Sean G y H en $T_{n,m}$. Si existe $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ tal que $F_k(G) = F_k(H)$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ y $F_j(G) > F_j(H)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $S_G(p) > S_H(p)$ para todo p en $(1-\delta, 1)$.

Prueba. Sea $p \in (0, 1)$. Por hipótesis tenemos que $S_G(p) - S_H(p) = \sum_{i=j}^{m}(F_i(G) - F_i(H))p^{m-i}(1-p)^i$, y además que $F_j(G) - F_j(H) > 0$. Dividiendo ambos miembros entre $(1-p)^j$ y tomando límite con p tendiendo a 1 por izquierda se deduce que

$$\lim_{p\to 1^-} \frac{S_G(p) - S_H(p)}{(1-p)^j} = F_i(G) - F_i(H) > 0.$$

Luego, la función $S_G(p) - S_H(p)$ es positiva en algún entorno $(1-\delta, 1)$. ■

Estudio de separabilidad local

Sea $T_{n,m}^{(0)} = T_{n,m}$. Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ definimos $T_{n,m}^{(i+1)} = \{G : G \in T_{n,m}^{(i)}\ F_{i+1}(G) \geq F_{i+1}(H)\ \forall H \in T_{n,m}^{(i)}\}$.

Lema 6.

Sean n y m tales que $T_{n,m}$ es no vacío. El conjunto $\mathcal{G}_{n,m}$ que consiste en todos los grafos localmente más separables en $T_{n,m}$ es precisamente el conjunto $T_{n,m}^{(m)}$, es decir que $\mathcal{G}_{n,m} = T_{n,m}^{(m)}$.

Prueba. Por hipótesis, $T_{n,m}^{(0)}$ es finito y no vacío. Se sigue por inducción que $T_{n,m}^{(m)}$ también es finito y no vacío. Por construcción, cada par de grafos G_1 y G_2 en $T_{n,m}^{(m)}$ son equivalentes. Sea G un grafo en $T_{n,m}^{(m)}$ y H en $T_{n,m} - T_{n,m}^{(m)}$. Sea j el primer índice tal que $H \notin T_{n,m}^{(j)}$. Luego, $F_i(G) = F_i(H)$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, j-1\}$ y $F_j(G) > F_j(H)$. Por el Lema 5, existe $\delta > 0$ tal que $S_G(p) > S_H(p)$ para todo $p \in (1-\delta, 1)$. ■

Estudio de separabilidad local

Obtendremos la secuencia de conjuntos $T_{n,m}^{(1)}, T_{n,m}^{(2)}, \ldots, T_{n,m}^{(m)}$ para concluir que $T_{n,m}^{(m)} = [G_{n,m}]$. Por el Lema 6, $\mathcal{G}_{n,m} = [G_{n,m}]$.

Lema 7.

Si $G \in T_{n,m}$ entonces $F_1(G) \leq b(n,m)$, y la igualdad se cumple si y sólo si G tiene $b(n,m)$ aristas puente que separan s de t.

Prueba. Sea G un grafo en $T_{n,m}$ cualquiera. Claramente, $b(G) \leq b(n,m)$, y la igualdad ocurre si y sólo si G tiene $b(n,m)$ puentes. Como cada arista separadora debe ser arista puente, tenemos que $F_1(G) \leq b(G)$, y la igualdad ocurre si y sólo si cada arista puente en G separa s de t. En consecuencia, $F_1(G) \leq b(n,m)$, y la igualdad se cumple si y sólo si G tiene $b(n,m)$ aristas puente que separan s de t. ■

Estudio de separabilidad local

Definamos $n' = n - b(n, m)$, $m' = m - b(n, m)$, y $\lambda' = \lambda(n', m')$.

Lema 8.

Cada grafo G en $T^{(1)}_{n,m}$ cumple con las siguientes afirmaciones:

1. $G' \in \mathcal{B}_0$.
2. $\lambda(G') \geq \lambda'$.
3. *Para cada* $i \in \{1, 2, \ldots, \lambda' - 1\}$, $F_i(G)$ *no depende de* G.

Prueba.

1. Como $b(G) = b(n, m)$, por el Lema 3 tenemos que $G' \in \mathcal{B}_0$.
2. Como $G' \in \mathcal{B}_0$, por la Proposición 1: $\lambda(G') \geq \lambda(B_{n',m'}) = \lambda'$.
3. Si $i \in \{1, 2, \ldots, \lambda' - 1\}$ y $G \in T^{(1)}_{n,m}$ entonces $\lambda(G') > \lambda'$, y para separar s de t tras retirar i aristas debemos retirar exactamente 1 puente, por lo que $F_i(G) = b(n, m)\binom{m'}{i-1}$. ■

Estudio de separabilidad local

Lema 9.

Sea G un grafo en $T^{(1)}_{n,m}$ que cumple una de las dos condiciones:

- *G' no es isomorfo a $B_{n',m'}$, o*
- *G' es isomorfo a $B_{n',m'}$ pero tras remover λ' aristas en $B_{n',m'}$ no separamos s de t,*

entonces se cumple que $F_{\lambda'}(G) = b(n,m)\binom{m'}{\lambda'-1}$.

Prueba. Sea G en $T^{(1)}_{n,m}$. Por el Lema 8, $G' \in \mathcal{B}_0$. Si G' no es isomorfo a $B_{n',m'}$ entonces, por la Proposición 1, sabemos que $\lambda(G') > \lambda'$. Luego, cada grafo G en las condiciones del enunciado cumple que $\lambda(G') > \lambda'$. Por el Lema 7, cada una de las $b(n,m)$ aristas puente de G son separadoras. Entonces, $F_{\lambda'}(G)$ coincide con la cantidad de formas de quitar 1 de las $b(n,m)$ aristas puente y $\lambda' - 1$ aristas de G', por lo que $F_{\lambda'}(G) = b(n,m)\binom{m'}{\lambda'-1}$. ■

Estudio de separabilidad local

Sea G en $T^{(1)}_{n,m}$ tal que G' es isomorfo a $B_{n',m'}$. Sea $n(G')$ la cantidad de separadores de s y t en G' que se obtienen de remover λ' aristas en G'. Entonces, $F_{\lambda'}(G) = b(n,m)\binom{m'}{\lambda'-1} + n(G')$.

Definición 25.

*Sea G en $T^{(1)}_{n,m}$ tal que G' es isomorfo a $B_{n',m'}$. Sea $s' = \arg\min_{y \in V(G')}\{d_G(s,y)\}$ y $t' = \arg\min_{y \in V(G')}\{d_G(t,y)\}$. Si $s' \neq t'$ entonces s' y t' se llaman **terminales proyectados en** G'.*

Notemos que G' con sus terminales proyectados pertenece a $T_{n',m'}$. Si $G \in T^{(1)}_{n,m}$ y $s' = t'$, entonces $d_G(s,t) = b(n,m)$ y $n(G') = 0$. Como queremos maximizar $F_{\lambda'}(G)$, podemos asumir que $s' \neq t'$.

Estudio de separabilidad local

Lema 10.

Sea G un grafo que cumple con las condiciones de la Definición 25. Las siguientes afirmaciones son ciertas.

1. *Si* $\lambda' = n' - 1$ *entonces* $F_{\lambda'}(G)$ *no depende de* G.
2. *Si* $\lambda' = n' - 2$ *entonces* $F_{\lambda'}(G)$ *es máximo sii* $s't' \notin G'$.
3. *Si* $\lambda' < n' - 2$ *y* $gr_{G'}(v') = \lambda'$ *entonces* $F_{\lambda'}(G)$ *es máximo sii* $v' \in \{s', t'\}$.

Prueba. Notemos que $n(G') = F_{\lambda'}(G')$. Luego, maximizar $F_{\lambda'}(G)$ es equivalente a maximizar $F_{\lambda'}(G')$.

1. Si $\lambda' = n' - 1$ entonces $G' = K_{n'}$, y $F_{\lambda'}(G') = 2$.
2. Si $\lambda' = n' - 2$ entonces $G' = K_{n'} - e$. Luego $F_{\lambda'}(G') \leq 2$, y la igualdad ocurre si y sólo si $e = s't'$.
3. Si $\lambda' < n' - 2$ entonces $F_{\lambda'}(G') \leq 1$, y la igualdad ocurre si y sólo si $v' \in \{s', t'\}$. ■

Estudio de separabilidad local

El Lema 10 caracteriza al conjunto $T_{n,m}^{(\lambda')}$. Sea ahora G en $T_{n,m}^{(\lambda')}$. Sabemos que G' es isomorfo a $B_{n',m'}$ y sus terminales proyectados s' y t' en $B_{n',m'}$ son diferentes. Sea G' el grafo en $T_{n',m'}$ equipado con sus terminales proyectados. Calculemos $S_G(p)$.

- Si no falla ningún puente de G entonces la separabilidad de G es igual a la de G' con sus terminales proyectados.
- Si falla 1 puente de G entonces la separabilidad de G es igual al polinomio confiabilidad $R_{B_{n',m'}}(p)$.
- Si fallan 2 o más puentes de G, la separabilidad de G es 0.

Por la fórmula de probabilidad total, para todo p en $[0,1]$

$$S_G(p) = p^{b(n,m)} S_{G'}(p) + b(n,m)(1-p)p^{b(n,m)-1} R_{G'}(p). \quad (1)$$

Estudio de separabilidad local

Lema 11.

Sea G en $T_{n,m}^{(\lambda')}$. Si $\lambda' \in \{n'-1, n'-2\}$ entonces $\mathcal{G}_{n,m} = [G_{n,m}]$.

Prueba. Sea H un grafo arbitrario en $T_{n,m}^{(\lambda')}$. Por el Lema 10, el esqueleto H' es isomorfo a $G_{n',m'}$. Además, por la ecuación (1),

$$\begin{aligned} S_H(p) &= p^{b(n,m)} S_{G_{n',m'}}(p) + b(n,m)(1-p)p^{b(n,m)-1} R_{B_{n',m'}}(p) \\ &= S_{G_{n,m}}(p). \end{aligned}$$

Luego, todo grafo en $T_{n,m}^{(\lambda')}$ es equivalente a $G_{n,m}$. Pero entonces $[G_{n,m}] = T_{n,m}^{(\lambda')} = T_{n,m}^{(m)} = \mathcal{G}_{n,m}$. ■

Estudio de separabilidad local

Lema 12.

Sea G en $T_{n,m}^{(\lambda')}$, donde $\lambda' \leq n' - 2$. Para cada $i \in \{\lambda', \lambda' + 1, \ldots, n' - 3\}$ el número $F_i(G)$ no depende de G. Además, $F_{n'-2}(G)$ es máximo si y sólo si $s't' \notin G'$.

Prueba. Sabemos que $G' = B_{n',m'}$ y, sin pérdida de generalidad, $s' = v'$. Sea U el único separador de G' con λ' aristas y sea $i \in \{\lambda', \lambda' + 1, \ldots, n' - 3\}$. Si no removemos puentes, debemos remover las aristas en U junto con $i - \lambda'$ aristas en $G' - U$. Si removemos 1 puente debemos remover posiblemente algunas (no todas) aristas de U y las restantes de $G' - U$. Entonces,

$$F_i(G) = \binom{m' - \lambda'}{i - \lambda'} + b(n, m) \sum_{j=0}^{\lambda'-1} \binom{\lambda'}{j} \binom{m' - \lambda'}{i - j - 1}, \qquad (2)$$

y $F_i(G)$ no depende de la elección de G.

Estudio de separabilidad local

Para probar la segunda parte del enunciado tomemos $i = n' - 2$. Por un lado, si $s't' \in G'$ entonces el grado de t' en G' es $n' - 1$. El razonamiento anterior aplica y $F_{n'-2}(G)$ se rige por la ecuación (2) fijando $i = n' - 2$. Por otro lado, si $s't' \notin G'$ entonces el grado de t' en G' es $n' - 2$. Es posible obtener una separación adicional quitando las $n' - 2$ aristas incidentes a t'. Entonces, $F_{n'-2}(G)$ es máximo si y sólo si $s't' \notin G'$, como queríamos probar. ∎

Prueba del Teorema de Existencia

Prueba del Teorema 1: Sea (n, m) en I. Definamos $n' = n - b(n, m)$, $m' = m - b(n, m)$, y $\lambda' = \lambda(n', m')$. Si $\lambda' \in \{n' - 1, n' - 2\}$ entonces el Lema 11 asegura que $\mathcal{G}_{n,m} = [G_{n,m}]$. Si $\lambda' < n' - 2$, por el Lema 12 tenemos que G pertenece a $T_{n,m}^{(n'-2)}$ si y sólo si G' es isomorfo a $B_{n',m'}$ y sus terminales proyectados s' y t' no son adyacentes. En estas condiciones, la función separabilidad $S_G(p)$ se rige por la ecuación (1). Como el grafo globo equipado con terminales $G_{n,m}$ satisface las condiciones anteriores, se sigue que $G_{n,m}$ pertenece al conjunto $T_{n,m}^{(n'-2)}$. Luego, cada par de grafos en $T_{n,m}^{(n'-2)}$ son equivalentes y $T_{n,m}^{(n'-2)} = \mathcal{G}_{n,m}$. Por último, como $G_{n,m}$ pertenece a $T_{n,m}^{(n'-2)}$ concluimos que $T_{n,m}^{(n'-2)} = [G_{n,m}]$. En consecuencia, $\mathcal{G}_{n,m} = [G_{n,m}]$, como queríamos probar. ■

Estudio de separabilidad uniforme

El Lema 4 y la Proposición 2 serán de utilidad para probar el Teorema de inexistencia. Para cada G en $T_{n,m}$ y cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ definimos la cantidad $N_i(G)$ como $F_{m-i}(G)$.

Ejercicio 4.

Sean G y H en $T_{n,m}$. Probar que si existe $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ tal que $N_k(G) = N_k(H)$ para cada $k \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$ y $N_i(G) > N_i(H)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $S_G(p) > S_H(p)$ para todo $p \in (0, \delta)$.

Proposición 2.

Para cada par de enteros n y m tales que $n \geq 7$ y $n \leq m \leq \binom{n-3}{2} + 3$ existe un grafo $H_{n,m}$ en $T_{n,m}$ tal que $N_{n-2}(H_{n,m}) > N_{n-2}(G_{n,m})$.

Estudio de separabilidad uniforme

Una vez que probemos la Proposición 2, ya estaremos en condiciones de probar el Teorema de inexistencia.

Prueba del Teorema 2: Supongamos que G^* es uniformemente más separable en $T_{n,m}$. Luego, $G^* \in \mathcal{G}_{n,m}$, y por el Teorema 1 tenemos que $F(G^*) = F(G_{n,m})$. Por la Proposición 2, existe $H_{n,m}$ en $T_{n,m}$ tal que $N_{n-2}(H_{n,m}) > N_{n-2}(G_{n,m})$. Luego, $N_{n-2}(H_{n,m}) > N_{n-2}(G^*)$. Notemos que para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n-3\}$ se tiene que $N_k(H_{n,m}) = N_k(G^*) = 0$. Aplicando el Lema 4 con $i = n-2$ obtenemos que existe $\delta > 0$ tal que $S_{H_{n,m}}(p) > S_{G^*}(p)$ para todo $p \in (0, \delta)$, lo que contradice que G^* es uniformemente más separable. ■

Estudio de separabilidad uniforme

Elijamos el terminal s en $G_{n,m}$ de modo que $s' = v'$. Sean n y m enteros tales que $n \geq 7$ y $n \leq m \leq \binom{n-3}{2} + 3$. Notemos que $b(G_{n,m}) \geq b(G_{n,\binom{n-3}{2}+3}) = 3$, por lo que $G_{n,m}$ tiene al menos 3 puentes. Queremos hallar algún grafo $H_{n,m}$ en $T_{n,m}$ tal que $N_{n-2}(H_{n,m}) > N_{n-2}(G_{n,m})$.

Definición 26.

Sea e_b un puente de $G_{n,m}$. Para cada $i \in \{0,1,2\}$, el grafo $H^{(i)}_{n,m}$ se obtiene de $G_{n,m}$ tras contraer el puente e_b y subdividir $e^{(i)}$:

- *Si $i = 0$ entonces $e^{(0)} = s'x$, donde $x \in G'_{n,m}$.*
- *Si $i = 1$ entonces $e^{(1)} = yz$, donde y y z son vértices en $G'_{n,m}$ no adyacentes a s'.*
- *Si $i = 2$ entonces los extremos de $e^{(2)}$ son vértices en $G'_{n,m}$ adyacentes a s'.*

Estudio de separabilidad uniforme

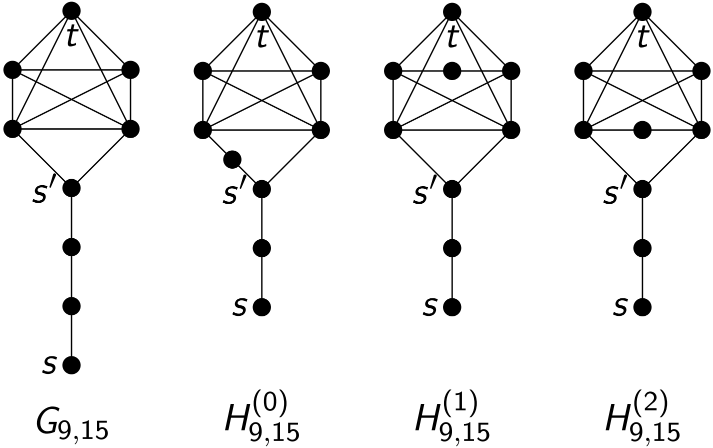


Figura: Grafos $G_{9,15}$, $H^{(0)}_{9,15}$, $H^{(1)}_{9,15}$ y $H^{(2)}_{9,15}$.

Estudio de separabilidad uniforme

Lema 13.

Sea (n, m) en I_1 y $G = G_{n,m}$. Sea H un grafo obtenido de G tras contraer un puente y subdividir una arista e de G'. Entonces,

$$N_{n-2}(H) - N_{n-2}(G) > (b(n, m) - 1)t(G' - e) - t(G'). \tag{3}$$

Prueba. Por hipótesis $(n, m) \in I_1$, por lo que G tiene al menos un puente. Además, $b(G) = b(n, m)$. Luego, por construcción, H tiene $b(n, m) - 1$ puentes. Sea $t_2(G')$ y $t_2(H')$ la cantidad de bosques recubridores en G y H con exactamente 2 árboles, cada uno de ellos incluyendo un terminal proyectado. Para hallar las cantidades $N_{n-2}(G)$ y $N_{n-2}(H)$, basta con contar los grafos separadores dentro de G y H obtenidos tras remover 0 o 1 puente (puesto que al remover 2 puentes o más, el resultado es un subgrafo con 3 o más componentes conexas).

Estudio de separabilidad uniforme

En ambos casos, si no removemos ningún puente entonces debemos separar el esqueleto. Si removemos un puente entonces debemos contar árboles recubridores en el esqueleto. Por lo tanto,

$$N_{n-2}(H) = (b(n,m)-1)t(H') + t_2(H'), \tag{4}$$
$$N_{n-2}(G) = b(n,m)t(G') + t_2(G'). \tag{5}$$

Sean e_1 y e_2 las aristas en H que se obtienen tras subdividir la arista e. Por la regla de la suma se deduce que $t(H') = t(H' * e_1) + t(H' - e_1) = t(G') + t(G' - e)$. De modo similar, $t_2(H') = t_2(G') + t_2(G' - e)$. Pero entonces,

$$N_{n-2}(H) - N_{n-2}(G) = (b(n,m)-1)t(G'-e) - t(G') + t_2(G'-e),$$

y el lema se sigue tras notar que $t_2(G' - e) > 0$. ■

Estudio de separabilidad uniforme

Lema 14.

Sean n y m enteros tales que $n \geq 7$ y $n \leq m \leq \binom{n-3}{2} + 3$, y sea $G = G_{n,m}$. Si G' tiene grado mínimo λ' tal que $\lambda' \geq 3$ entonces $N_{n-2}(H^{(0)}_{n,m}) > N_{n-2}(G)$.

Prueba. Por hipótesis se deduce que $b(n,m) \geq 3$. Como $\lambda(G') \geq 3$, el grafo G' tiene al menos 4 vértices, es decir, $n' \geq 4$. Sea e_b un puente de G. Tomemos una arista e en G' de modo que uno de sus extremos sea s'. Construyamos $H^{(0)}_{n,m}$ a partir de G mediante la contracción de e_b seguida de la subdivisión de e. Por el Lema 13,

$$N_{n-2}(H^{(0)}_{n,m}) - N_{n-2}(G) > (b(n,m) - 1)t(G' - e) - t(G'). \quad (6)$$

Estudio de separabilidad uniforme

Notemos que $G' \cong H(n'; \lambda')$, mientras que $G' - e \cong H(n'; \lambda' - 1)$. Por el Teorema de Bogdanowicz,

$$t(G') = t(H(n'; \lambda')) = \lambda'(n')^{\lambda'-1}(n'-1)^{n'-\lambda'-2};$$
$$t(G'-e) = t(H(n'; \lambda'-1)) = (\lambda'-1)(n')^{\lambda'-2}(n'-1)^{n'-\lambda'-1}.$$

Entonces,

$$t(G'-e) = \frac{\lambda'-1}{\lambda'}\frac{n'-1}{n'}t(G') \geq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)t(G') = \frac{t(G')}{2}, \quad (7)$$

donde usamos que $\lambda' \geq 3$ y $n' \geq 4$. Reemplazando (7) en (6) y usando que $b(n,m) \geq 3$ se deduce que

$$N_{n-2}(H_{n,m}^{(0)}) - N_{n-2}(G) > (b(n,m)-1)\frac{t(G')}{2} - t(G') \geq 0,$$

por lo que $N_{n-2}(H_{n,m}^{(0)}) > N_{n-2}(G)$, como queríamos probar. ■

Estudio de separabilidad uniforme

Lema 15.

Sean n y m enteros tales que $n \geq 7$ y $n \leq m \leq \binom{n-3}{2} + 3$, y sea $G = G_{n,m}$. Si G' tiene n' vértices y grado mínimo λ' tales que $n' \geq 5$ y $\lambda' \leq n' - 3$, entonces $N_{n-2}(H^{(1)}_{n,m}) > N_{n-2}(G)$.

Prueba. Por hipótesis se deduce que $b(n,m) \geq 3$. Como $\lambda' \leq n' - 3$, existen al menos dos vértices y y z en G' que no son adyacentes a s'. Sea $H^{(1)}_{n,m}$ el grafo obtenido de G tras contraer una arista y subdividir la arista $e = yz$. Por el Lema 13,

$$N_{n-2}(H^{(1)}_{n,m}) - N_{n-2}(G) > (b(n,m) - 1)t(G' - e) - t(G'). \quad (8)$$

Estudio de separabilidad uniforme

Ahora usaremos la Fórmula de Bogdanowicz para hallar $t(G')$ y $t(G'-e)$. Notemos que $G' \cong H(n';\lambda')$, mientras que $G'-e \cong H(n';n'-3,\lambda')$. Por la Fórmula de Bogdanowicz,

$$t(G') = t(H(n';\lambda')) = \lambda'(n')^{\lambda'-1}(n'-1)^{n'-\lambda'-2};$$

$$t(G'-e) = t(H(n';n'-3,\lambda')) = \lambda'(n')^{\lambda'-1}(n'-3)(n'-1)^{n'-\lambda'-3}.$$

Entonces,

$$t(G'-e) = \frac{n'-3}{n'-1}t(G') \geq \frac{t(G')}{2}, \tag{9}$$

donde usamos que $n' \geq 5$. Reemplazando (9) en (8) y usando que $b(n,m) \geq 3$ se deduce que

$$N_{n-2}(H^{(1)}_{n,m}) - N_{n-2}(G) > (b(n,m)-1)\frac{t(G')}{2} - t(G') \geq 0,$$

por lo que $N_{n-2}(H^{(1)}_{n,m}) > N_{n-2}(G)$, como queríamos probar. ■

Estudio de separabilidad uniforme

Ejercicio 5.

Sea G' el grafo en $T_{4,5}$ con terminales s y t tal que $G' = K_4 - \{s,t\}$. Sea H' el grafo en $T_{5,6}$ que proviene de subdividir la única arista de G' tal que ninguno de sus extremos es terminal. Probar que $t(G') = 4$ y que $t_2(G') = 8$, mientras que $t(H') = 8$ y $t_2(H') = 12$.

Lema 16.

Sean n y m enteros tales que $n \geq 7$ y $n \leq m \leq \binom{n-3}{2} + 3$ y sea $G = G_{n,m}$. Si G' tiene $n' = 4$ vértices y grado mínimo $\lambda' = 2$ entonces $N_{n-2}(H^{(2)}_{n,m}) > N_{n-2}(G)$.

Estudio de separabilidad uniforme

Prueba. Por hipótesis se deduce que $b(n,m) \geq 3$. En las condiciones del enunciado, $G' = K_4 - \{s,t\}$. Sea e_b un puente de G. Construyamos el grafo $H_{n,m}^{(2)}$ a partir de G mediante la contracción de e_b seguida de la subdivisión de la única arista de G' tal que ninguno de sus extremos es terminal. Por el Ejercicio 5 tenemos que $t(G') = 4$ y $t_2(G') = 8$, mientras que $t(H') = 8$ y $t_2(H') = 12$. Entonces,

$$\begin{aligned} N_{n-2}(G) &= b(n,m)t(G') + t_2(G') = 4b(n,m) + 8; \\ N_{n-2}(H) &= (b(n,m)-1)t(H') + t_2(H') \\ &= 8(b(n,m)-1) + 12 = 8b(n,m) + 4. \end{aligned}$$

Como $b(n,m) \geq 3$, tenemos que $N_{n-2}(H) = 4b(n,m) + (4b(n,m)+4) > 4b(n,m) + 8 = N_{n-2}(G)$, como queríamos probar. ■

Prueba del Teorema de Inexistencia

Prueba de la Proposición 2: Sean n y m enteros como en el enunciado. Como $B_{n',m'}$ no tiene puentes, $\lambda' \geq 2$. Si $\lambda' > 2$ entonces, por el Lema 14, tomando $H = H^{(0)}_{n,m}$ tenemos que $N_{n-2}(H) > N_{n-2}(G_{n,m})$. Si $\lambda' = 2$ entonces $n' \geq 3$. Si $\lambda' = 2$ y $n' \geq 5$ entonces, por el Lema 15, tomando $H = H^{(1)}_{n,m}$ tenemos que $N_{n-2}(H) > N_{n-2}(G_{n,m})$. Si $\lambda' = 2$ y $n' = 3$ entonces $n = m$ y ya fue probado por Brown y McMullin [3] que existe un grafo $H_{n,n}$ en $T_{n,n}$ tal que $N_{n-2}(H_{n,n}) > N_{n-2}(G_{n,n})$ cuando $n \geq 6$. Por último, si $\lambda' = 2$ y $n' = 4$ entonces, por el Lema 16, tomando $H = H^{(2)}_{n,m}$ tenemos que $N_{n-2}(H) > N_{n-2}(G_{n,m})$. ■

El Teorema de Inexistencia se sigue de la Proposición 2.

Problemas abiertos

Problemas abiertos

1. Determinar si existe o no existe grafo uniformemente más separable en cada una de las clases $T_{n,m}$ tales que $n \geq 7$ y $\binom{n-3}{2} + 4 \leq m \leq \binom{n}{2} - 2$.
2. Responder a la misma pregunta anterior pero considerando cada una de las clase no vacías $\mathcal{S}_{n,m}$ de grafos simples con n vértices y m aristas.
3. Analizar el mismo problema pero con más de 2 terminales.
4. Determinar si el grafo globo es uniformemente menos confiable.
5. Determinar si el grafo globo es Tutte-mínimo.

Referencias I

Z. Bogdanowicz.
Undirected simple connected graphs with minimum number of spanning trees.
Discrete Mathematics, 309(10):3074–3082, 2009.

J. Brown and C. J. Colbourn.
Roots of the reliability polynomials.
SIAM Journal on Discrete Mathematics, 5(4):571–585, 1992.

J. Brown and I. McMullin.
On the split reliability of graphs.
Networks, 82(2):177–185, 2023.

Referencias II

J. Brown and L. Mol.
On the roots of all-terminal reliability polynomials.
Discrete Mathematics, 340(6):1287–1299, 2017.

E. Moore and C. Shannon.
Reliable circuits using less reliable relays.
Journal of the Franklin Institute, 262(3):191–208, 1956.

L. Petingi, J. T. Saccoman, and L. Schoppmann.
Uniformly least reliable graphs.
Networks, 27(2):125–131, 1996.

P. Romero.
Universal reliability bounds for sparse networks.
IEEE Transactions on Reliability, 71(1):359–369, 2022.

Referencias III

G. Royle and A. Sokal.
The Brown–Colbourn conjecture on zeros of reliability polynomials is false.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 91(2):345–360, 2004.