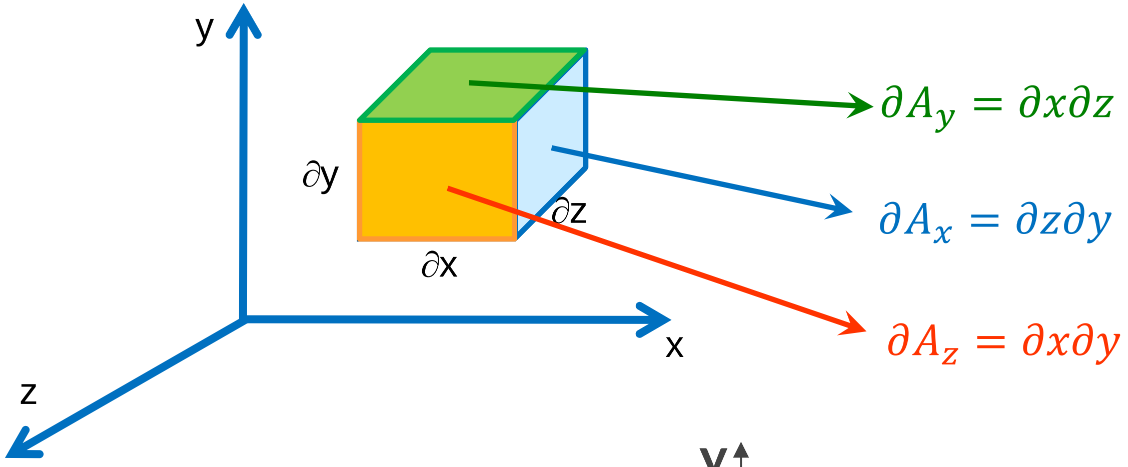
Operaciones con vectores y sistemas coordenados

Apéndice A - Bird

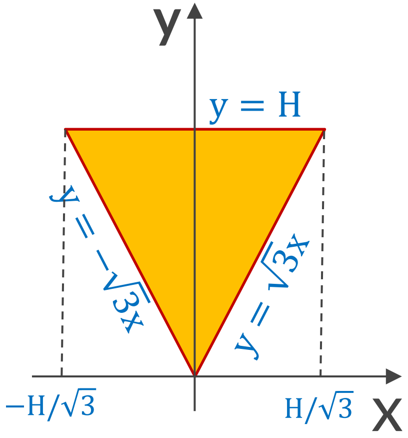
FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Fenómenos de Transporte en Ingeniería de Procesos

Sistema cartesiano



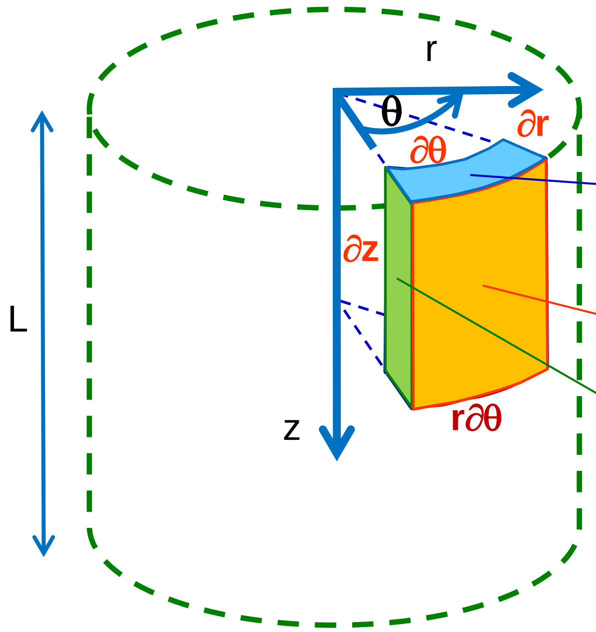
$$\partial V = \partial x \partial y \partial z$$



$$\partial A_z = \partial x \partial y$$

$$A_z = \int \partial A_z = \int_0^H \int_{-y/\sqrt{3}}^{y/\sqrt{3}} \partial x \partial y = \int_0^H \frac{2y}{\sqrt{3}} \partial y = \frac{H^2}{\sqrt{3}}$$

Coordenadas cilíndricas



$$\partial V = r\partial r\partial\theta\partial z$$

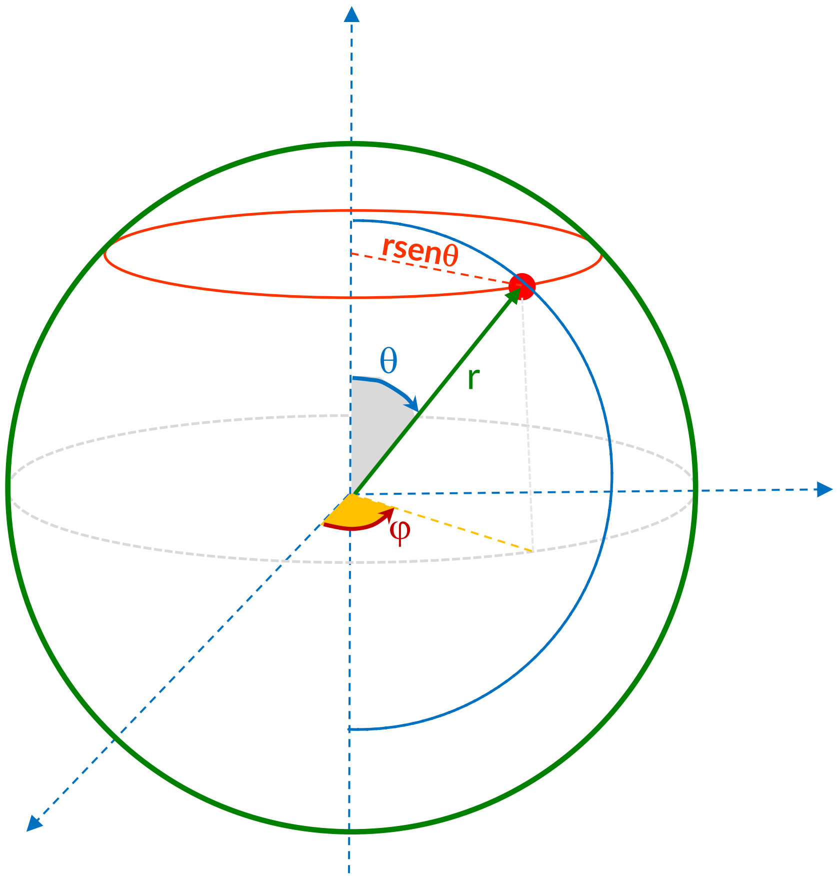
$$\partial A_z = r\partial r\partial\theta$$

$$\partial A_r = R\partial\theta\partial z$$

$$\partial A_\theta = \partial r\partial z$$

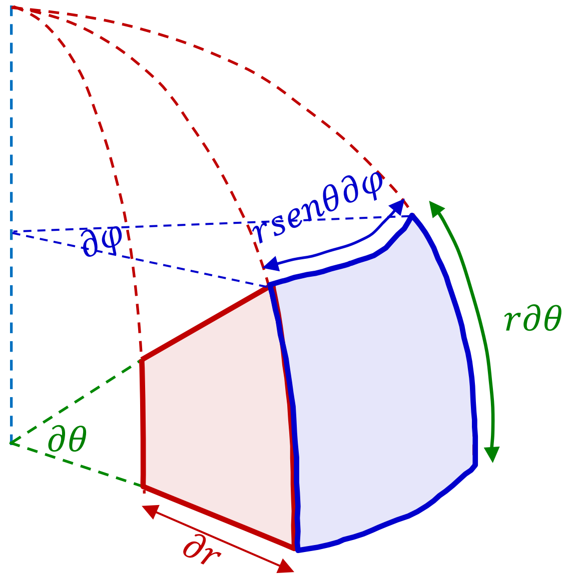
$$0 \leq r \leq R$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq z \leq L$$

Coordenadas esféricas



$$0 \leq r \leq R$$
$$0 \leq \theta \leq \pi$$
$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Coordenadas esféricas



$$\partial V = (\partial r)(r\partial\theta)(rsen\theta\partial\phi)$$

$$\boxed{\partial V = r^2 sen\theta\partial r\partial\theta\partial\phi}$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 sen\theta\partial r\partial\theta\partial\phi \qquad V = 2\pi\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 sen\theta\partial r\partial\theta$$

$$V = 2\pi\int_0^{R} r^2(-\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \cos 0)\partial r = 4\pi\int_0^{R} r^2\partial r$$

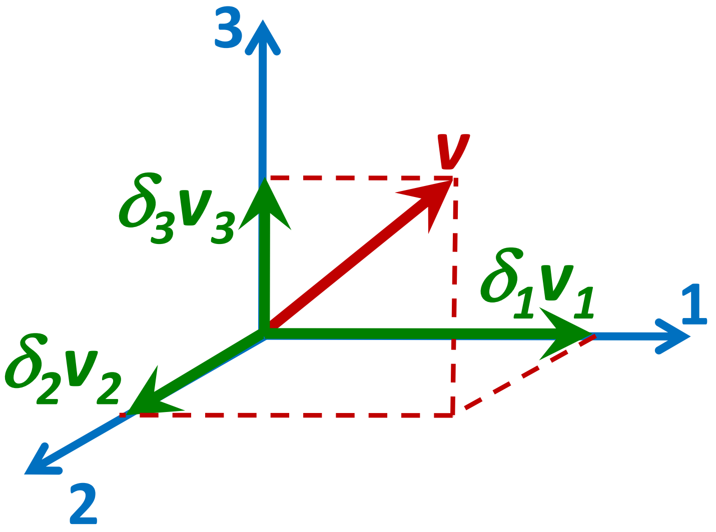
$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 sen\theta\partial\theta\partial\phi = R^2\int_0^{2\pi} 2\,\partial\phi$$

$$\boxed{A = 4\pi R^2}$$

Vectores

$$\vec{v} = \vec{\delta}_1 v_1 + \vec{\delta}_2 v_2 + \vec{\delta}_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} \vec{\delta}_i v_i$$



1, 2, 3 son los ejes coordenados (x,y,z) (r,θ,z) (r,θ,φ)

δ_i – vectores unitarios (versores) en la dirección de los ejes

Operaciones vectoriales

Producto escalar (producto punto) de vectores $\vec{v} \bullet \vec{w}$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z\, w_z \qquad \vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_i v_i w_i$$

El resultado es un escalar

Producto vectorial (producto cruz) de vectores $\vec{v} \times \vec{w}$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \left[\left(v_y w_z - v_z w_y\right); \quad \left(v_z w_x - v_x w_z\right); \quad \left(v_x w_y - v_y w_x\right)\right] = \begin{vmatrix} \delta_x & \delta_y & \delta_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \sum_i \boldsymbol{\delta}_i v_i w_i$$

Es un vector, perpendicular a los vectores que se multiplican (es decir normal al plano que los contienen), cuyo módulo es igual al área del paralelogramo que forman dichos vectores.

Operaciones vectoriales

Producto tensorial (o producto diádico) entre dos vectores: $\vec{v}\vec{w}$

$$\vec{v}\vec{w} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_x w_x & v_x w_y & v_x w_z \\ v_y w_x & v_y w_y & v_y w_z \\ v_z w_x & v_z w_y & v_z w_z \end{Bmatrix} = \sum_i \sum_j \boldsymbol{\delta}_i \boldsymbol{\delta}_j v_i w_i$$

Es un tensor que resulta de multiplicar el vector $\vec{v}$ por el vector transpuesto a $\vec{w}$. Se nota sin punto o cruz entre los vectores

Operaciones tensoriales

Producto escalar (o producto doble punto) entre dos tensores: $\bar{\bar{\tau}}:\bar{\bar{\sigma}}$

$$\bar{\bar{\tau}}:\bar{\bar{\sigma}} = \tau_{xx}\sigma_{xx} + \tau_{xy}\sigma_{yx} + \tau_{xz}\sigma_{zx} + \tau_{yx}\sigma_{xy} + \tau_{yy}\sigma_{yy} + \tau_{yz}\sigma_{zy} + \tau_{zx}\sigma_{xz} + \tau_{zy}\sigma_{yz} + \tau_{zz}\sigma_{xz}$$

$$\bar{\bar{\tau}}:\bar{\bar{\sigma}} = \sum_i \sum_j \tau_{ij}\sigma_{ji}$$

Da como resultado un escalar, que se obtiene sumando el producto cada una de las componentes un tensor por la componente del otro tensor con subíndices invertidos.

Operaciones tensoriales

Producto tensorial (o producto punto) entre dos tensores: $\bar{\bar{\tau}} \cdot \bar{\bar{\sigma}}$

$$\bar{\bar{\tau}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} = \left\{\begin{pmatrix} (\tau_{xx}\sigma_{xx} + \tau_{xy}\sigma_{yx} + \tau_{xz}\sigma_{zx}) & (\tau_{xx}\sigma_{xy} + \tau_{xy}\sigma_{yy} + \tau_{xz}\sigma_{zy}) & (\tau_{xx}\sigma_{xz} + \tau_{xy}\sigma_{yz} + \tau_{xz}\sigma_{zz}) \\ (\tau_{yx}\sigma_{xx} + \tau_{yx}\sigma_{xx} + \tau_{yx}\sigma_{xx}) & (\tau_{yx}\sigma_{xy} + \tau_{yx}\sigma_{xy} + \tau_{yx}\sigma_{xy}) & (\tau_{yx}\sigma_{xz} + \tau_{yx}\sigma_{xz} + \tau_{yx}\sigma_{xz}) \\ (\tau_{zx}\sigma_{xx} + \tau_{zx}\sigma_{xx} + \tau_{zx}\sigma_{xx}) & (\tau_{zx}\sigma_{xy} + \tau_{zx}\sigma_{xy} + \tau_{zx}\sigma_{xy}) & (\tau_{zx}\sigma_{xz} + \tau_{zx}\sigma_{xz} + \tau_{zx}\sigma_{xz}) \end{pmatrix}\right\}$$

$$\bar{\bar{\tau}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} = \sum_i \sum_k \delta_i \delta_k \sum_j \tau_{ij}\sigma_{jk}$$

El resultado es un tensor

Operaciones tensoriales

Producto vectorial (o producto punto) entre un tensor y un vector: $\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v}$

$$\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v} = \left[\left(\tau_{xx}v_x + \tau_{xy}v_y + \tau_{xz}v_z\right); \quad \left(\tau_{yx}v_x + \tau_{yy}v_y + \tau_{yz}v_z\right); \quad \left(\tau_{zx}v_x + \tau_{zy}v_y + \tau_{zz}v_z\right)\right]$$

$$\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v} = \sum_i \delta_i \sum_j \tau_{ij} v_j$$

El resultado es un vector

Operaciones diferenciales con vectores y tensores

Operador ∇

$$\nabla = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right); \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}\right); \quad \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right] = \sum_i \boldsymbol{\delta}_i \frac{\partial}{\partial i}$$

Se usa para calcular gradientes o divergencias. Cuando se calculan gradientes el resultado es una entidad de un orden mayor, mientras que si se calculan divergencias, el resultado es una entidad de un orden menor.

Operaciones diferenciales con vectores y tensores

Gradiente de un campo escalar ∇s

$$\nabla s = \sum_{i=1}^{3} \vec{\delta}_i \frac{\partial s}{\partial x_i} = \vec{\delta}_1 \frac{\partial s}{\partial x_1} + \vec{\delta}_2 \frac{\partial s}{\partial x_2} + \vec{\delta}_3 \frac{\partial s}{\partial x_3}$$

El gradiente de un escalar **es un vector** que apunta en la dirección de la mayor velocidad de cambio de ese escalar, cuyas componentes están dadas por la derivada parcial del escalar respecto a cada eje coordenado.

Operaciones diferenciales con vectores y tensores

Gradiente de un vector: $\nabla\vec{v}$

$$\nabla\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}v_x & \frac{\partial}{\partial x}v_y & \frac{\partial}{\partial x}v_z \\ \frac{\partial}{\partial y}v_x & \frac{\partial}{\partial y}v_y & \frac{\partial}{\partial y}v_z \\ \frac{\partial}{\partial z}v_x & \frac{\partial}{\partial z}v_y & \frac{\partial}{\partial z}v_z \end{bmatrix} = \sum_i \sum_j \boldsymbol{\delta}_i \boldsymbol{\delta}_j \frac{\partial}{\partial i} v_j$$

El gradiente de un vector **es un tensor**, definido por el producto diádico del vector nabla y del vector del que queremos calcular el gradiente

Operaciones diferenciales con vectores y tensores

Divergencia de un vector: $\nabla \cdot \vec{v}$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_i \frac{\partial}{\partial i} v_i$$

El resultado es un escalar

Es el producto escalar entre el operador nabla y el vector en consideración.

Operaciones diferenciales con vectores y tensores

Divergencia de un tensor: $\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} = \left[\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right); \quad \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right); \quad \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \right]$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} = \sum_j \delta_j \sum_i \frac{\partial}{\partial i} \tau_{ij}$$

Es el producto vectorial entre el operador nabla y el tensor en consideración. El resultado es un vector.

Operaciones diferenciales con vectores y tensores

Laplaciano de un escalar: $\nabla^2 s$.

$$\nabla \cdot \nabla s = \nabla^2 s = \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right)$$

El laplaciano de un escalar es la divergencia del gradiente de una propiedad escalar s, y su resultado es una magnitud escalar.

Operaciones diferenciales con vectores y tensores

Laplaciano de un vector: $\nabla^2\vec{v}$.

$$\nabla\cdot\nabla\vec{v}=\nabla^2\vec{v}=\left[\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right);\quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2};\quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

$$\nabla^2\vec{v}=\sum_i \delta_i \sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial j^2}$$

El laplaciano de un vector es la divergencia del gradiente de ese vector $\vec{v}$, y su resultado es un vector

Derivadas respecto al tiempo en distintos sistemas de referencia

Derivada parcial $\frac{\partial c}{\partial t}$

Indica la variación de la propiedad c con el tiempo (velocidad de cambio de c) para un observador ubicado en una posición fija del espacio (x, y, z) (Enfoque Euleriano)

El observador fijo define un volumen de control, y observa como cambia la concentración en el tiempo dentro de ese volumen de control.

Derivadas respecto al tiempo en distintos sistemas de referencia

Derivada total $\frac{dc}{dt}$

Es la variación de la propiedad c con el tiempo observada desde un punto x que se desplaza a una velocidad w (enfoque Lagrangiano), siendo:

$$\vec{w} = [w_x\ w_y\ w_z] = \left[\frac{dx}{dt}\ \ \frac{dy}{dt}\ \ \frac{dz}{dt}\right]$$

Velocidad de desplazamiento del observador

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + w_x \frac{\partial c}{\partial x} + w_y \frac{\partial c}{\partial y} + w_z \frac{\partial c}{\partial z}$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{w}.\nabla c}$$

Derivadas respecto al tiempo en distintos sistemas de referencia

Derivada material o substancial $\frac{Dc}{Dt}$

Es la variación de la propiedad c con el tiempo observada desde un punto que se desplaza a la misma velocidad del fluido **v**, siendo

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z}$$

$$\boxed{\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v}.\nabla c}$$

Derivadas respecto al tiempo en distintos sistemas de referencia

Relaciones entre $\frac{\partial c}{\partial t}$, $\frac{dc}{dt}$ y $\frac{Dc}{Dt}$

$$\boxed{\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{w}.\nabla c}$$

$$\boxed{\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v}.\nabla c}$$

$$si\ \vec{v} = 0, \qquad \frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t}$$

$$si\ \vec{v} = \vec{w}, \qquad \frac{Dc}{Dt} = \frac{dc}{dt}$$

Muchas gracias por tu atención

www.fing.edu.uy

/fingudelar

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY