

Balances de envoltura. Distribución de velocidades y de esfuerzos

Capítulo 2 - Bird



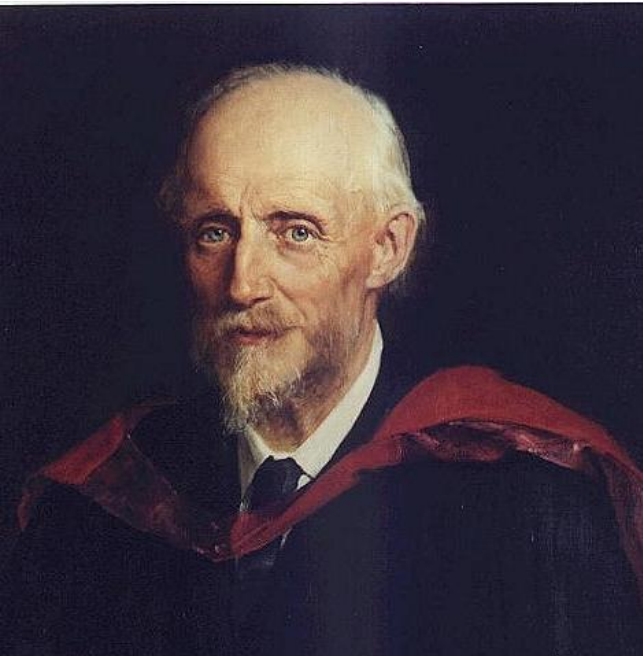
FACULTAD DE
INGENIERÍA



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Fenómenos de Transporte en Ingeniería de Procesos

Escurreimiento de fluidos



http://es.wikipedia.org/wiki/Osborne_Reynolds

Osborne Reynolds: 1842 – 1912

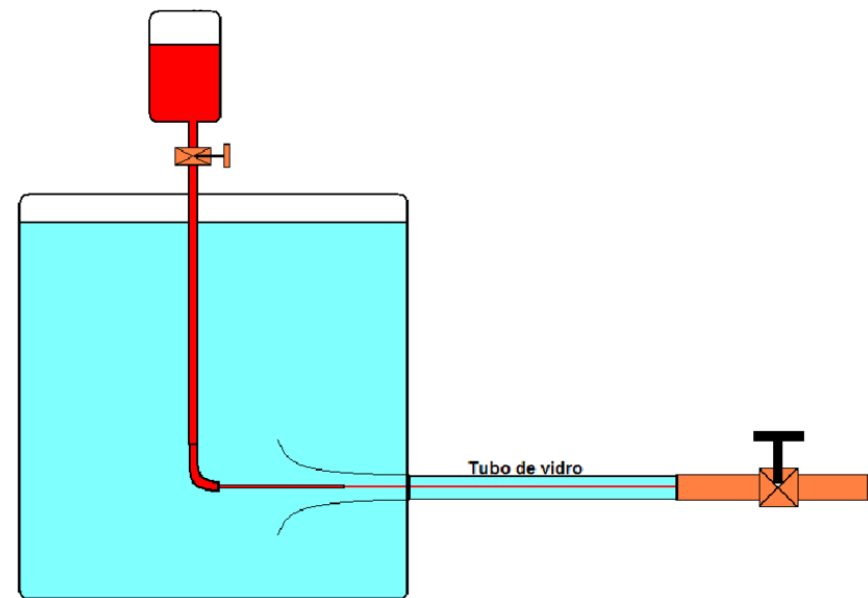
Matemático y físico Irlandés. Realizó grandes aportes en la dinámica de fluidos y a la industria naval.

Trabajó en dos firmas de ingenieros y luego se graduó en Matemáticas en la Universidad de Cambridge. Profesor en Manchester. Miembro de la Royal Society.

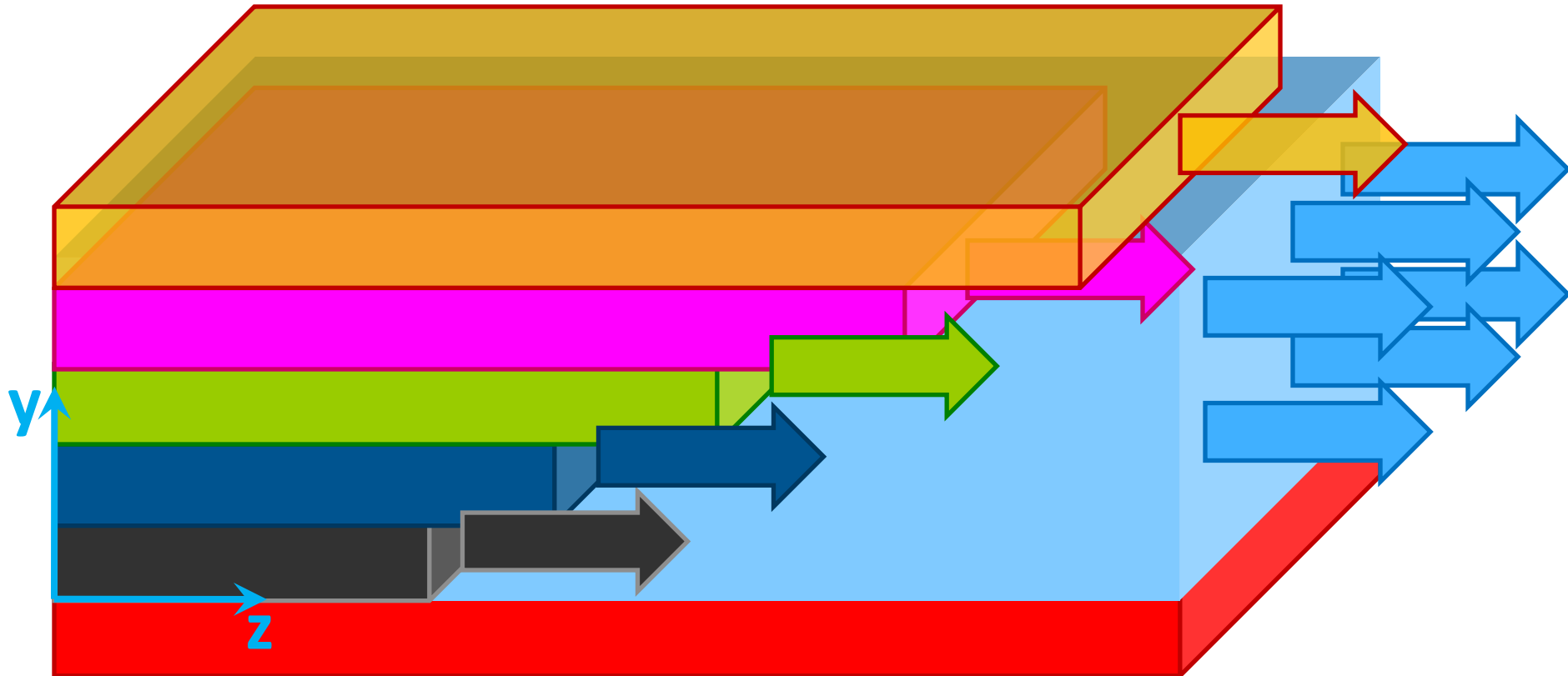
Número de Reynolds

Ecuaciones de variación para el flujo turbulento

Experimento de Reynolds

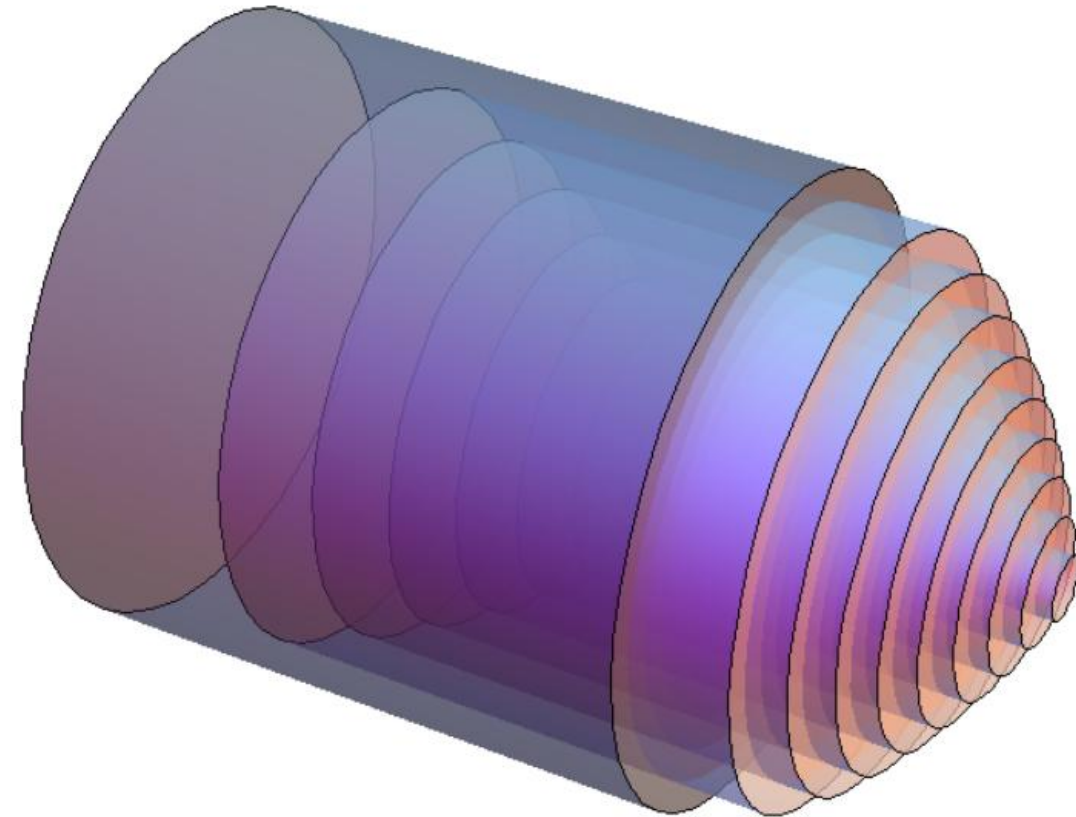
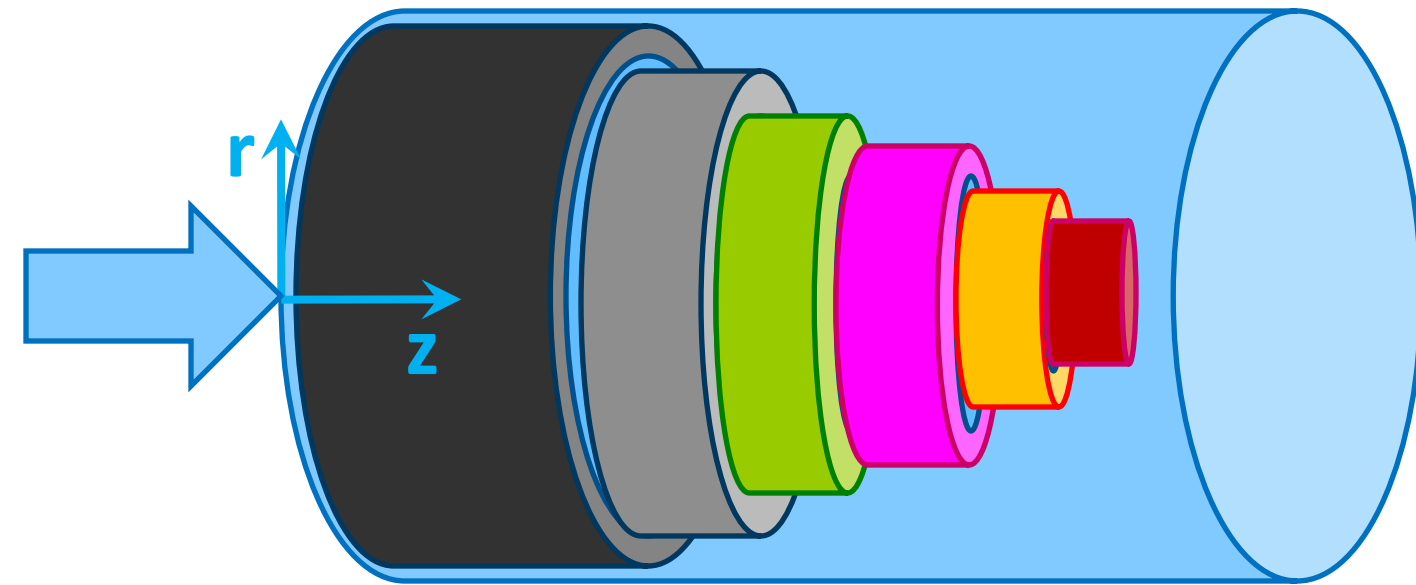


Flujo laminar



$$\vec{v} = [v_x, v_y, v_z] = [0, 0, v_z] \text{ donde } v_z = f(y)$$

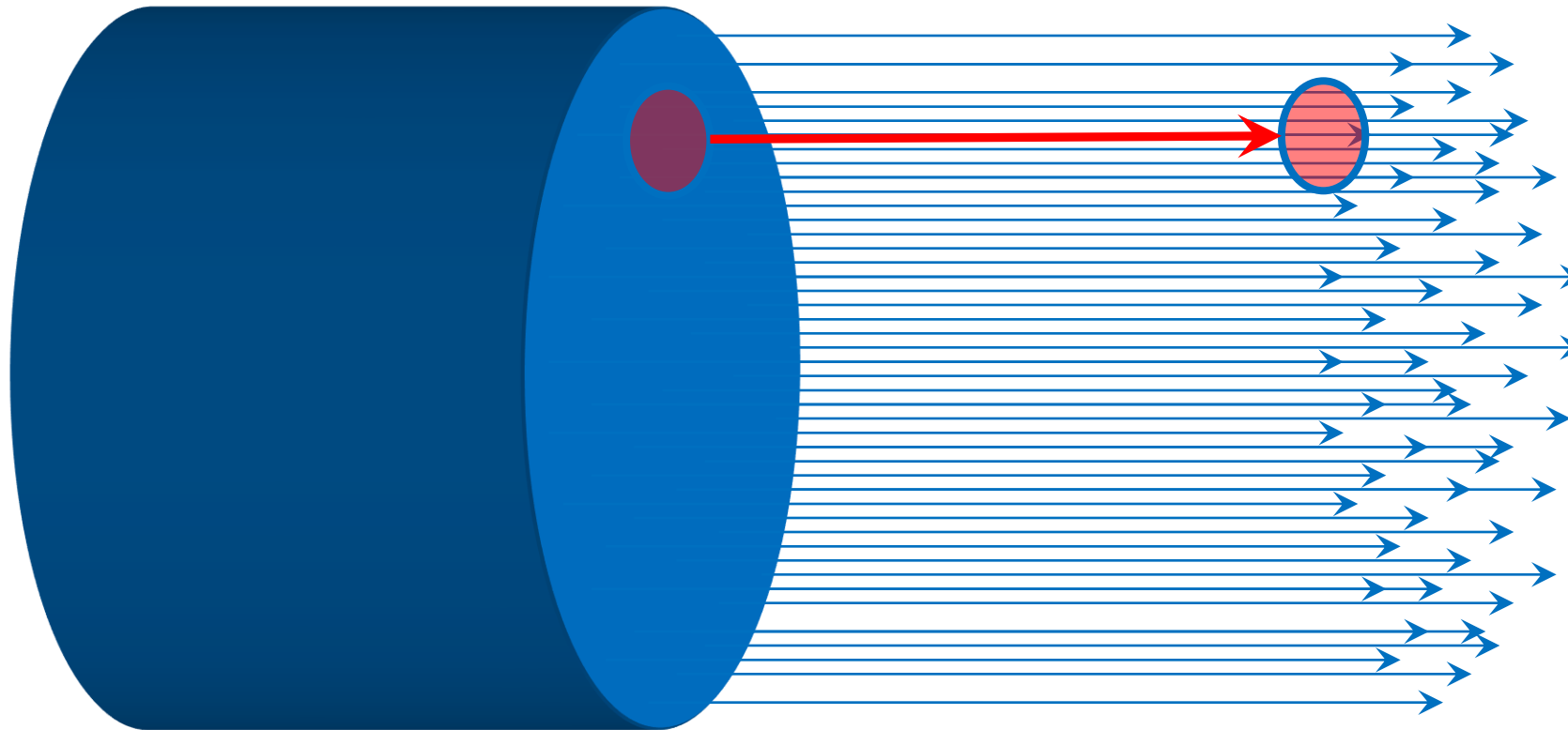
Flujo laminar



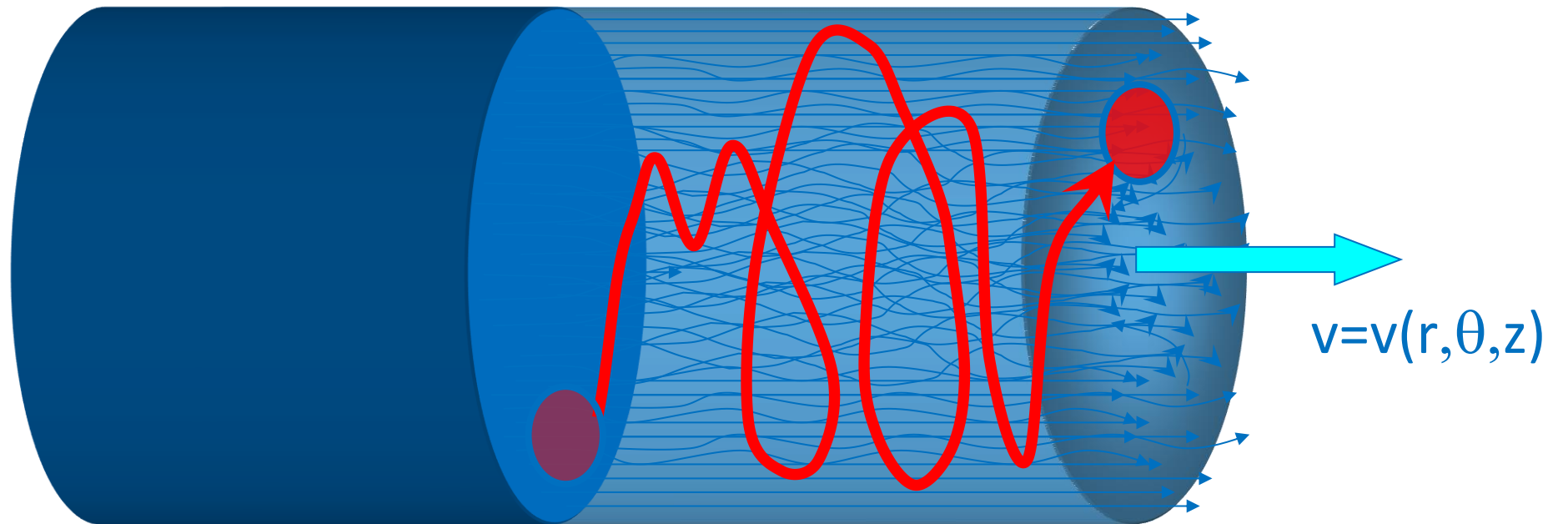
$$\vec{v} = [v_r, v_\theta, v_z] = [0, 0, v_z]$$

donde $v_z = f(r)$

Flujo laminar



Flujo turbulento



$$\vec{v} = [v_r, v_\theta, v_z] \begin{cases} v_r \neq 0 \\ v_\theta \neq 0 \\ v_z \neq 0 \end{cases}$$

<https://www.youtube.com/watch?v=6OzAx1bPGD4>

<https://www.youtube.com/watch?v=1wNmtle6qkE>

Número de Reynolds

El número de Reynolds (Re) es la relación entre las fuerzas de inercia (convectivas, asociadas a la velocidad de flujo del fluido) y las fuerzas viscosas (por esfuerzos asociados a gradientes de velocidad en el sistema). **El Re al cual ocurre la transición de flujo laminar a turbulento depende de la geometría del sistema, pero no depende de cuál es el fluido que escurre.**

$$Re = \left| \frac{\text{Fuerzas de inercia asociadas a flujo del fluido}}{\text{Fuerzas viscosas asociadas a gradientes de velocidad}} \right|$$

$$\text{ó } Re = \left| \frac{\text{Densidad de Flujo de CDM convectivo}}{\text{Densidad de Flujo de CDM viscoso}} \right|$$

Número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho v_c L_c}{\mu}$$

El número de Reynolds es un número adimensional que permite saber el régimen de escurrimiento del fluido

donde: v_c es la velocidad característica del sistema
 L_c es la longitud característica del sistema

Para cada sistema existirá **un número de Reynolds crítico (Re_c)**. Si el Re del escurrimiento es menor que el Re_c del sistema, el fluido se mueve en régimen laminar.

Número de Reynolds

En un tubo, la velocidad característica es la velocidad media del escurrimiento $\langle v \rangle$ y la longitud característica el diámetro del tubo

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu}$$

$$Re_{c_{tubo}} = 2.100$$

Si $Re < 2.100 \rightarrow$ El escurrimiento es en régimen laminar

Si $2.100 < Re < 10.000 \rightarrow$ El escurrimiento está en transición

Si $Re > 10.000 \rightarrow$ El escurrimiento es turbulento



Sistemas en flujo

Flujo por arrastre: El flujo es generado por arrastre de una o más superficies sólidas **en movimiento que están** en contacto con el fluido

Flujo no confinado: El flujo es producido por una fuerza externa (ej. gravedad) en un sistema abierto a la atmósfera

Flujo confinado: El flujo es producido por un impulsor o por gravedad en un sistema donde todas las interfases están confinadas por paredes sólidas



Balances de envoltura

Desarrollar una metodología que permita determinar para un sistema en el que circula un fluido en régimen laminar, el perfil de velocidades y el perfil de esfuerzos.

A partir de estos perfiles, calcular parámetros de interés como la **velocidad media** del escurrimiento, **el caudal volumétrico** (L/h), **la fuerza** que el fluido realiza sobre el sistema, etc.

Balances de envoltura

1. Considerar geometría. Elección de sistema de ejes, origen y coordenadas más adecuadas
2. Elección de un elemento de volumen de espesor infinitesimal (la envoltura)
3. Plantear los Balances de masa y cantidad de movimiento

Balance de masa

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{vel de entrada} \\ \text{de MASA al VC} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{vel de salida de} \\ \text{MASA del VC} \end{array} \right\} = \frac{\partial M}{\partial t}$$

Acumulación

Balance de cantidad de movimiento

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{vel de entrada} \\ \text{de C.de M. al VC} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{vel de salida} \\ \text{de C.de M. del VC} \end{array} \right\} + \sum_{\text{sobre el sistema}} \vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$$

Acumulación



Balances de envoltura

4. Planteo de las ecuaciones diferenciales (tomar lím para espesor del $VC \rightarrow 0$)
5. Incorporación de la relación entre esfuerzo cortante y gradiente de velocidades (Ec. Constitutiva de τ)
6. Integración para obtener el perfil de velocidades con las condiciones de contorno
7. Cálculo de las magnitudes de interés
8. Revisión de las suposiciones



Condiciones de interfase

Interfases sólido-fluido: En la interfase la velocidad del fluido es igual a la de la superficie sólida (**condición de no deslizamiento**)

Interfases líquido-gas: se supone que el τ en la superficie del líquido es cero, ya que el esfuerzo ejercido por un flujo gaseoso a velocidades normales es muy pequeño (y por lo tanto se desprecia)

Interfases líquido-líquido: se considera que tanto el esfuerzo como la velocidad son continuas a través de la interfase. Es decir, el τ y la velocidad son los mismos en ambos fluidos sobre la interfase.

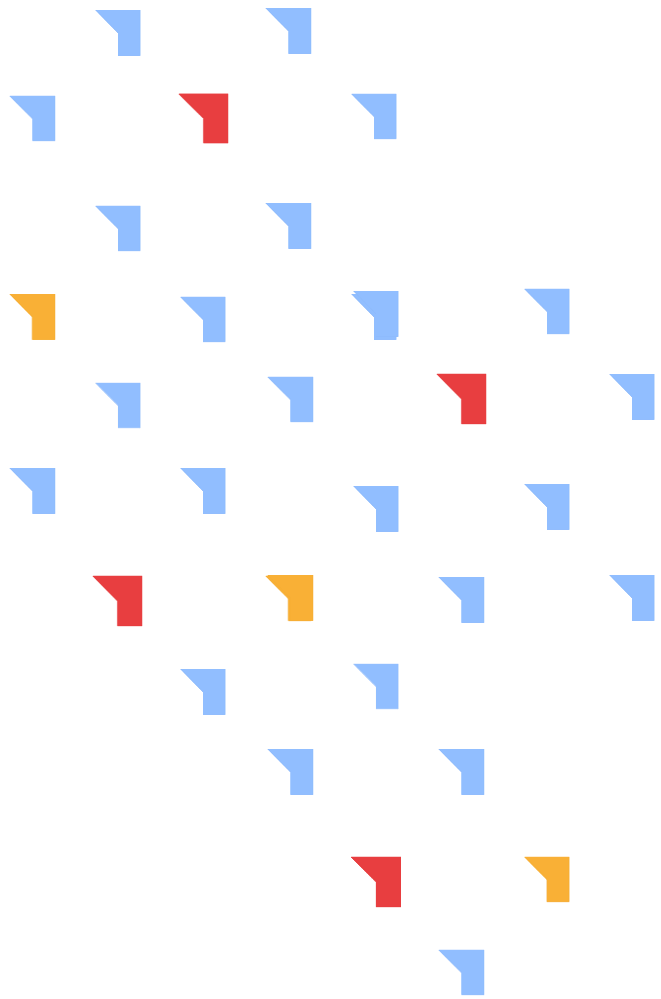


Condiciones de contorno

Condición de simetría: En el eje de simetría de un sistema simétrico ocurrirá un máximo o un mínimo relativo de la velocidad y el esfuerzo será nulo.

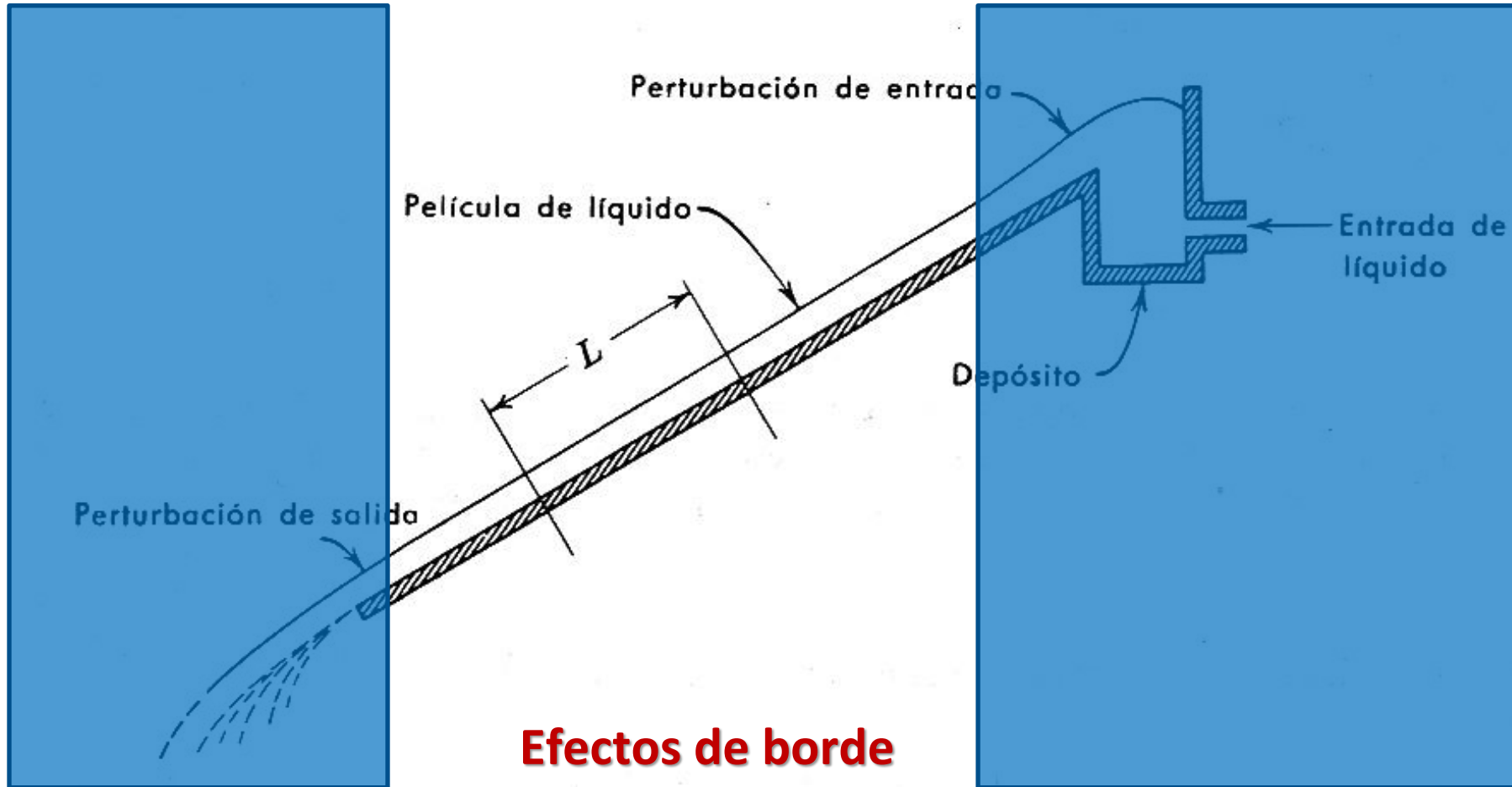
Condición geométrica de longitud infinita: si en alguna dirección del sistema, la dimensión del mismo es mucho mayor que en las otras direcciones, se puede considerar que en dicha dirección los gradientes de cualquier propiedad serán despreciables y la densidad de flujo será prácticamente nula en dicha dirección.

Condición de efecto de borde despreciables: implica despreciar los efectos de cambios de dirección del flujo que ocurren normalmente en las zonas de entrada y salida al sistema y considerar una parte del sistema donde el flujo tiene una única dirección.



Flujo laminar en una película descendente abierta a la atmósfera

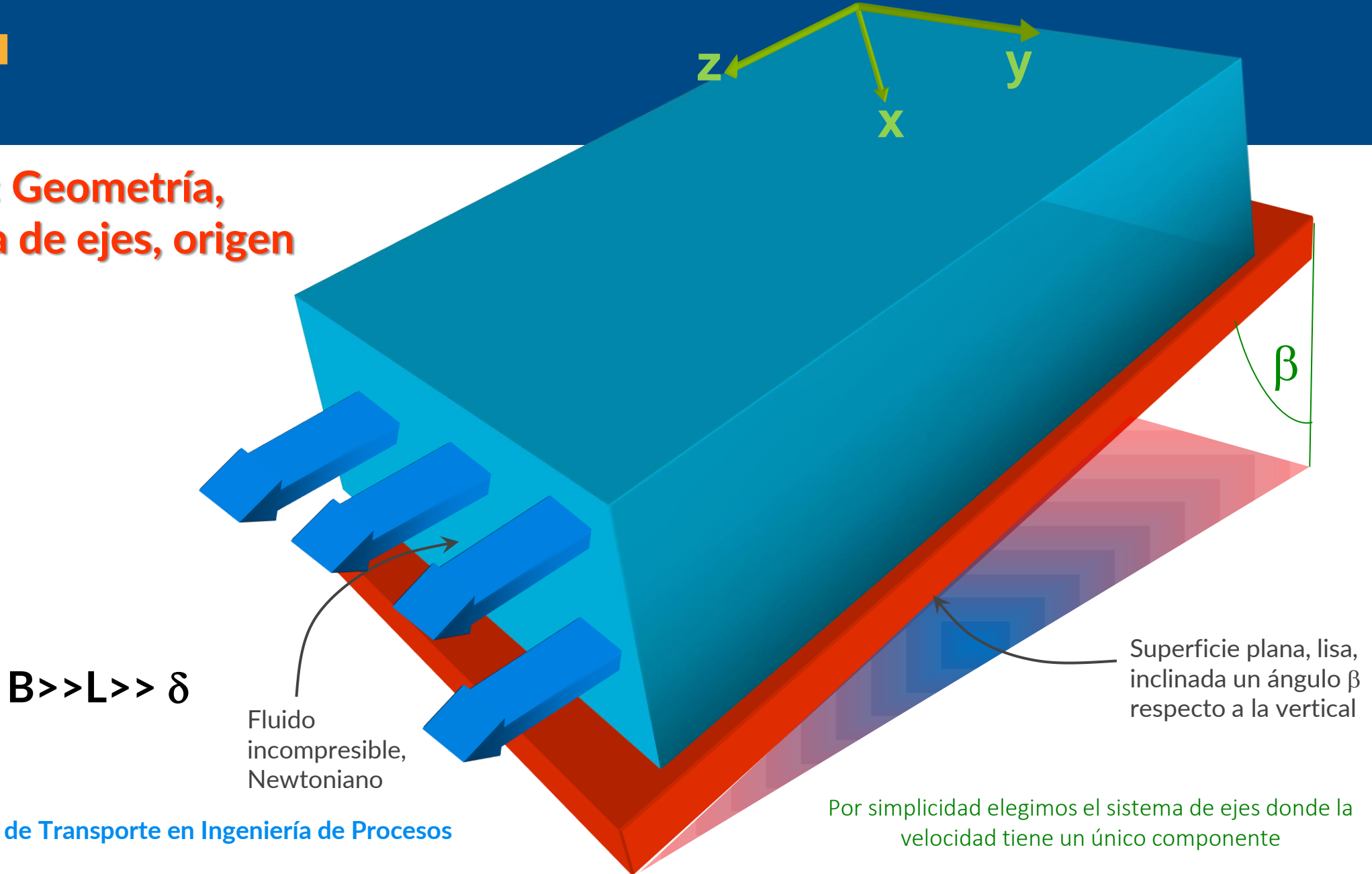
Fluido newtoniano e incompresible, estado estacionario, efectos de borde despreciables.



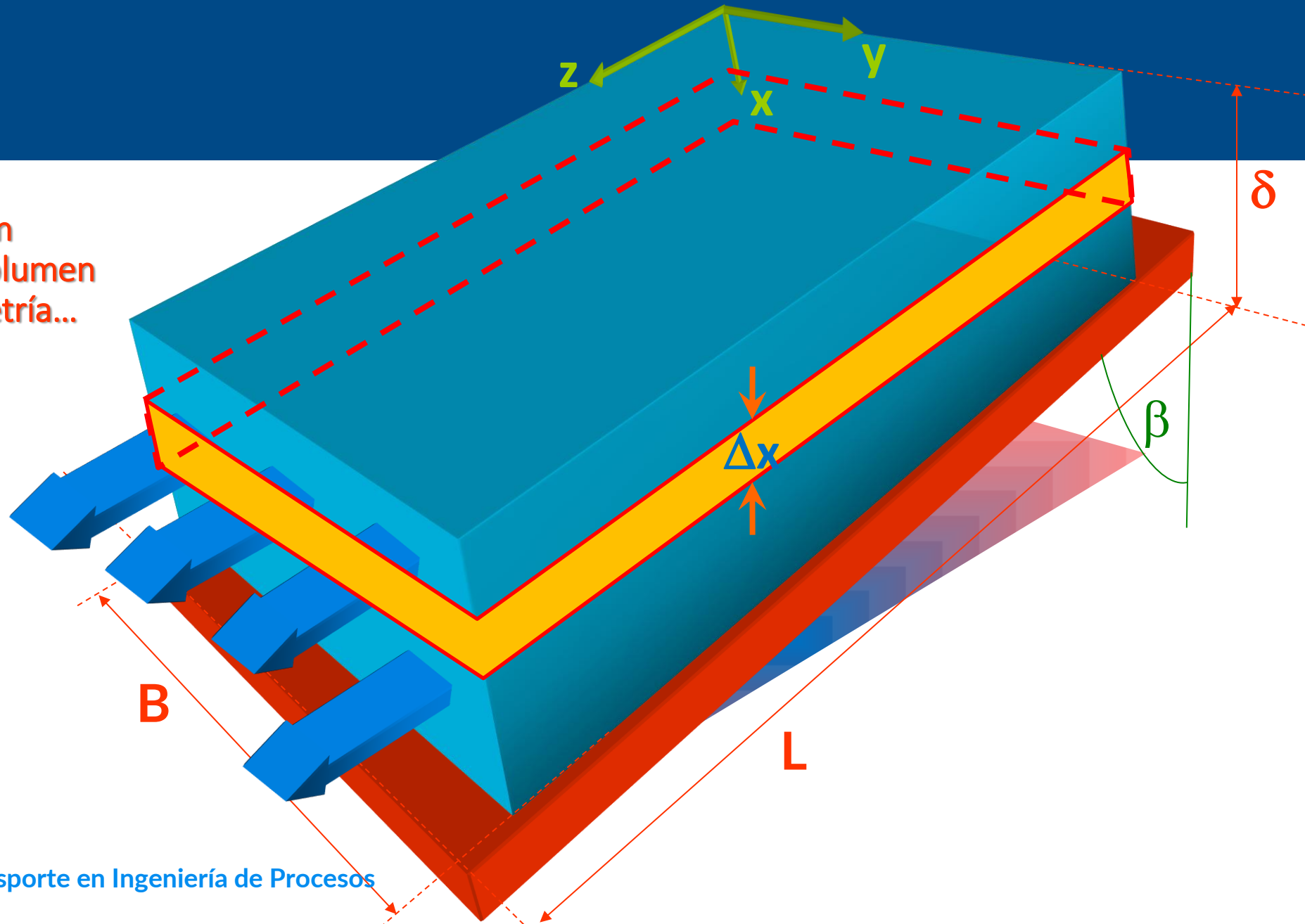
Efectos de borde despreciables

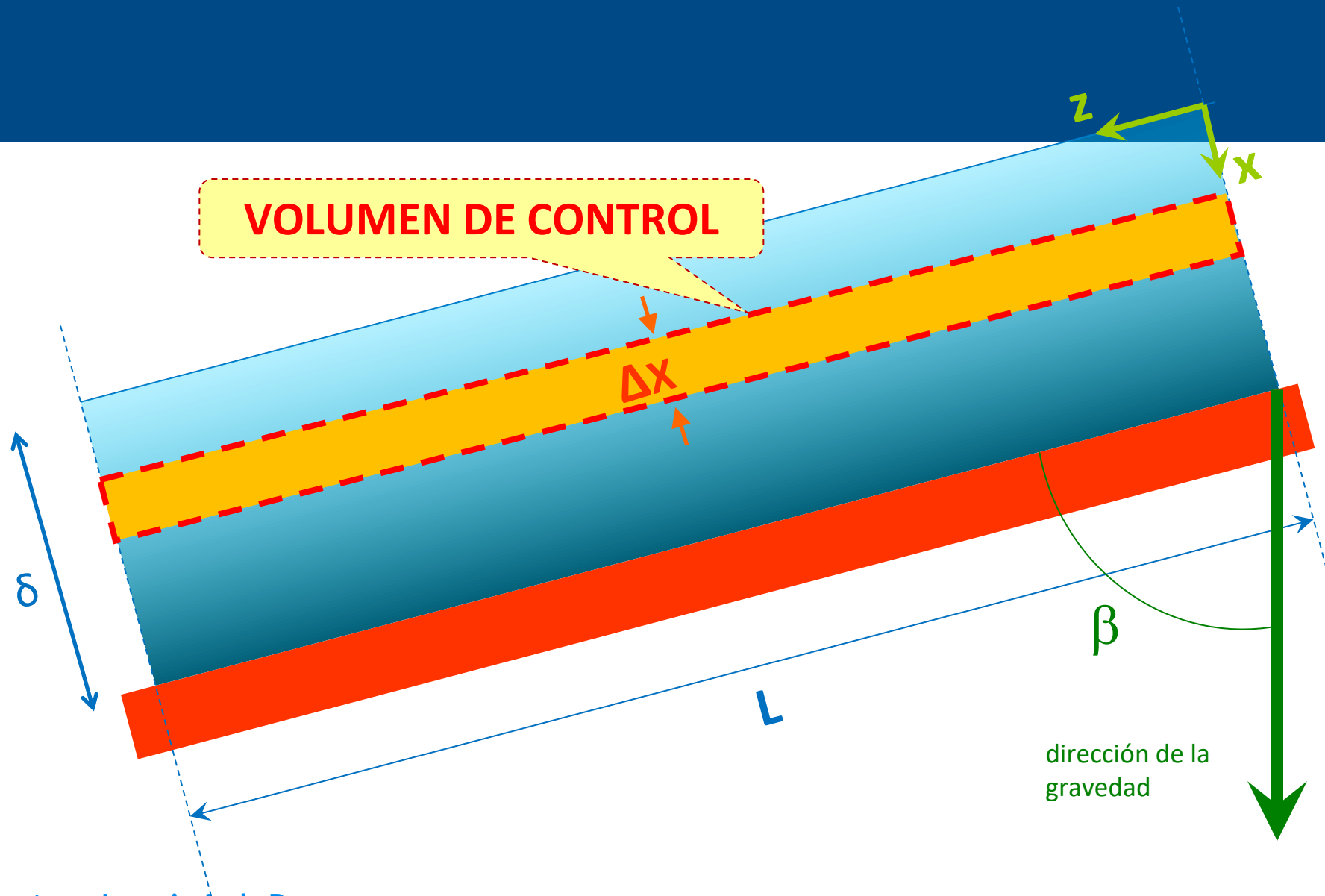


Paso 1: Geometría, sistema de ejes, origen

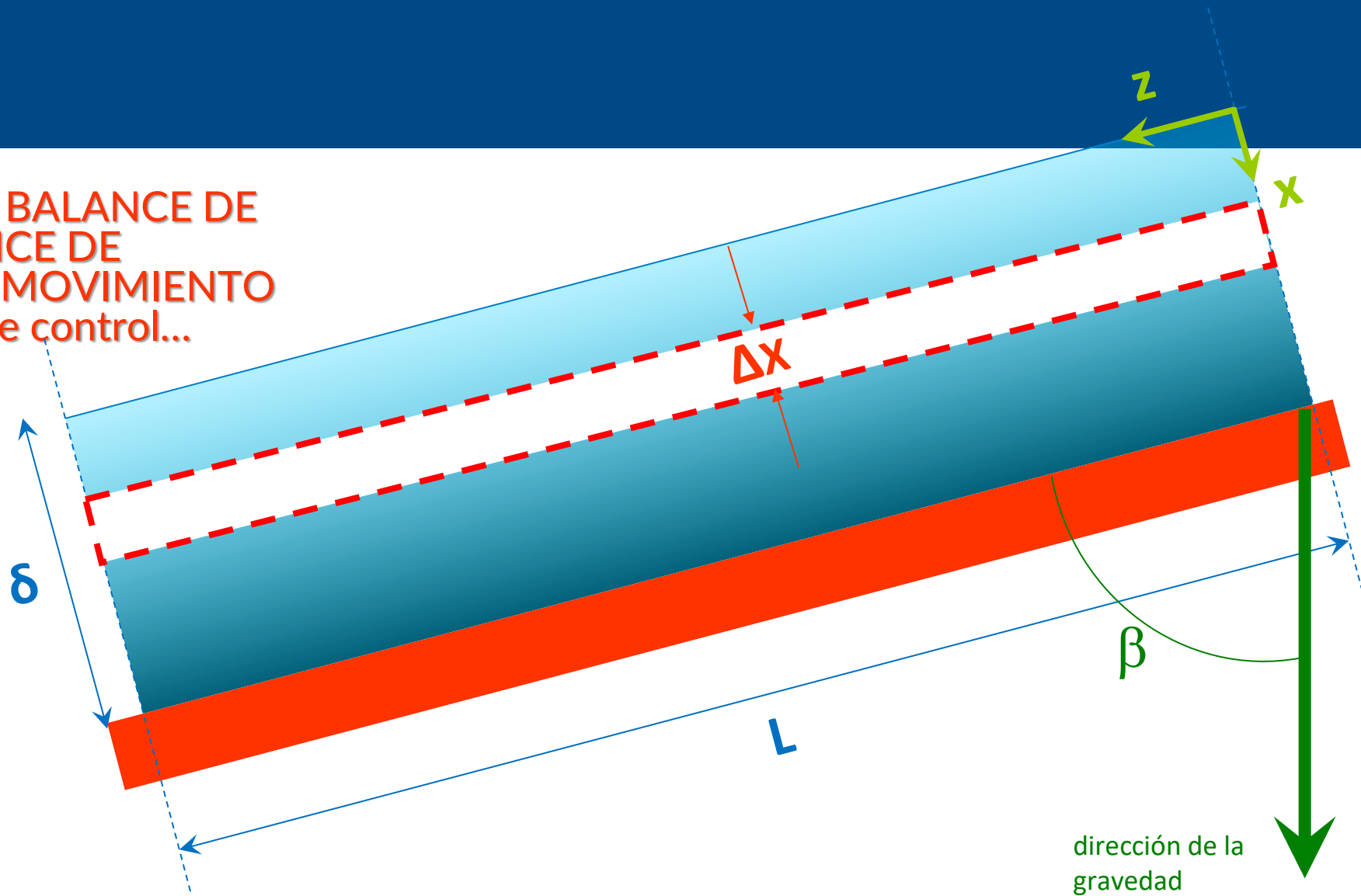


Paso 2: Elegir un elemento de volumen según la geometría...





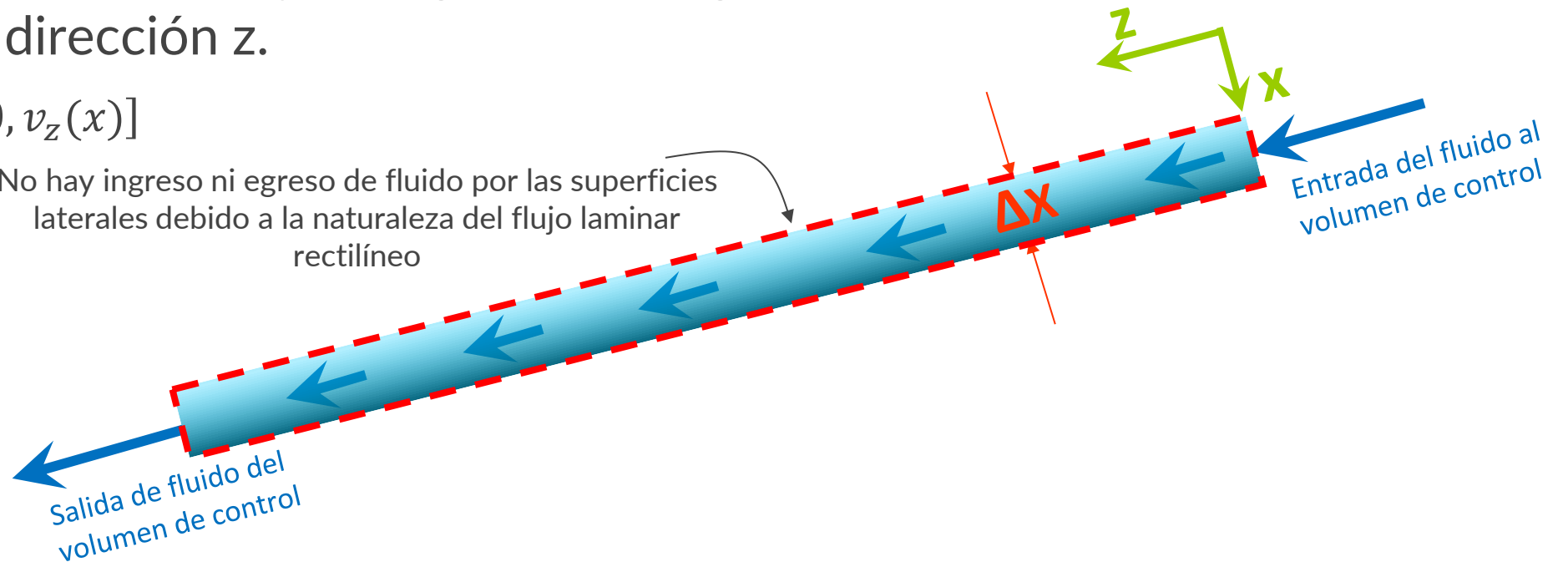
Paso 3: Realizar BALANCE DE MASA y BALANCE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO en el volumen de control...



Debido a la geometría, a los ejes elegidos y al régimen laminar, el fluido se mueve únicamente en la dirección z.

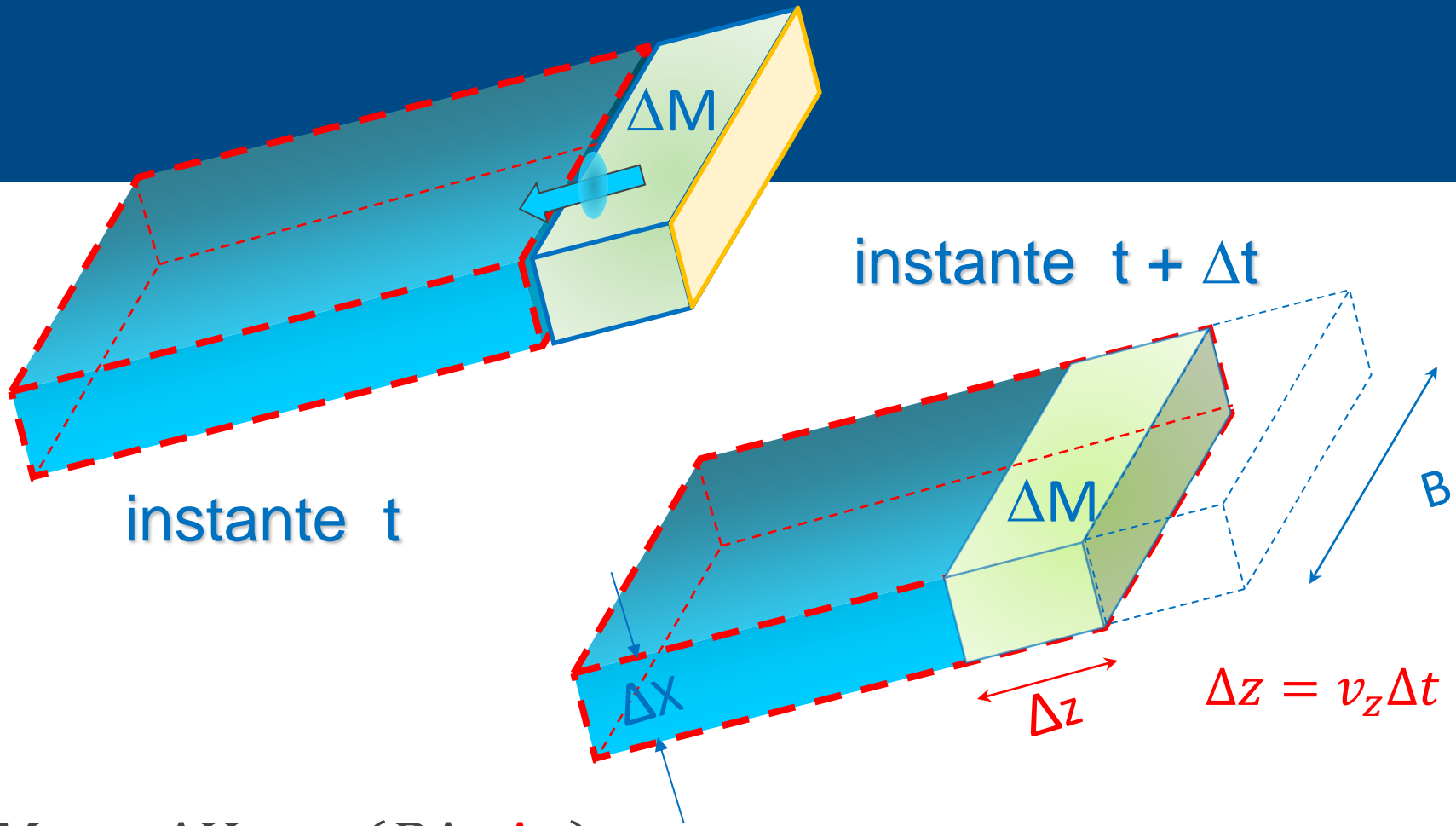
$$\vec{v} = [v_x, v_y, v_z] = [0, 0, v_z(x)]$$

No hay ingreso ni egreso de fluido por las superficies laterales debido a la naturaleza del flujo laminar rectilíneo



Despreciamos los efectos de borde (entrada o salida) que puedan afectar las líneas de flujo.

¿Cuánta masa ingresa y egresa del volumen de control ?



$$\Delta M = \rho \Delta V = \rho (B \Delta x \Delta z)$$

$$\Delta M = \rho v_z B \Delta x \Delta t$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \omega = \rho v_z B \Delta x$$

Área de flujo

Flujo masa

Balance de masa

Velocidad de egreso de masa =

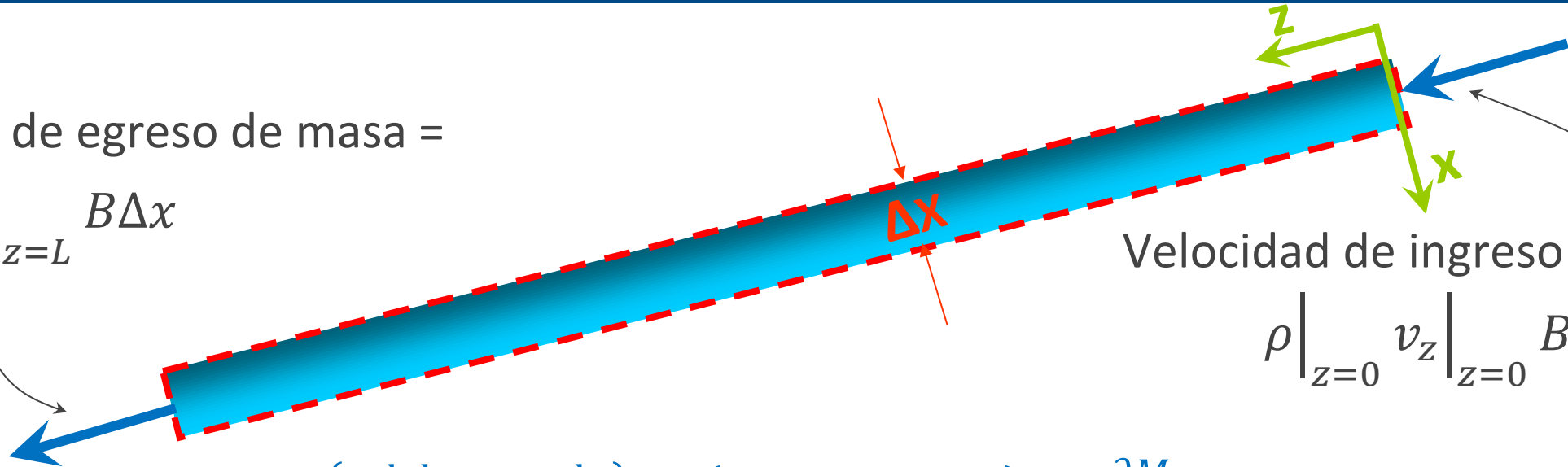
$$\rho \Big|_{z=L} v_z \Big|_{z=L} B \Delta x$$

Velocidad de ingreso de masa =

$$\rho \Big|_{z=0} v_z \Big|_{z=0} B \Delta x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{vel de entrada} \\ \text{de MASA al VC} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{vel de salida de} \\ \text{MASA del VC} \end{array} \right\} = \frac{\partial M}{\partial t}$$

$$\left\{ \rho \Big|_{z=0} v_z \Big|_{z=0} B \Delta x \right\} - \left\{ \rho \Big|_{z=L} v_z \Big|_{z=L} B \Delta x \right\} = \frac{\partial M}{\partial t}$$



Balance de masa

$$\rho \Big|_{z=0} v_z \Big|_{z=0} B \Delta x - \rho \Big|_{z=L} v_z \Big|_{z=L} B \Delta x = \frac{\partial M}{\partial t}$$

Estado estacionario: $\frac{\partial M}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho \Big|_{z=0} v_z \Big|_{z=0} - \rho \Big|_{z=L} v_z \Big|_{z=L} = 0$

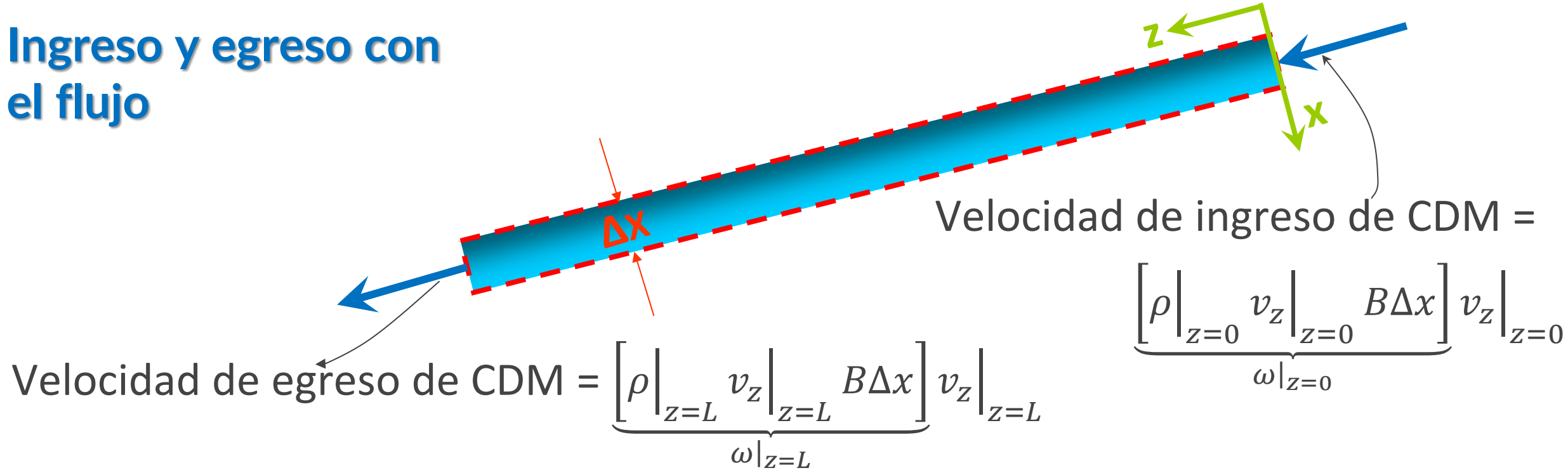
Fluido incompresible: ρ es constante $\Rightarrow \rho \Big|_{z=0} = \rho \Big|_{z=L}$ $v_z \Big|_{z=0} = v_z \Big|_{z=L}$

CONDICIÓN DE PERFIL TOTALMENTE DESARROLLADO: La velocidad no varía en la dirección del escurrimiento

$$\left. \begin{array}{l} v_z \neq f(z) \\ v_z \neq f(y) \end{array} \right\} \Rightarrow v_z = f(x) \text{ solamente}$$

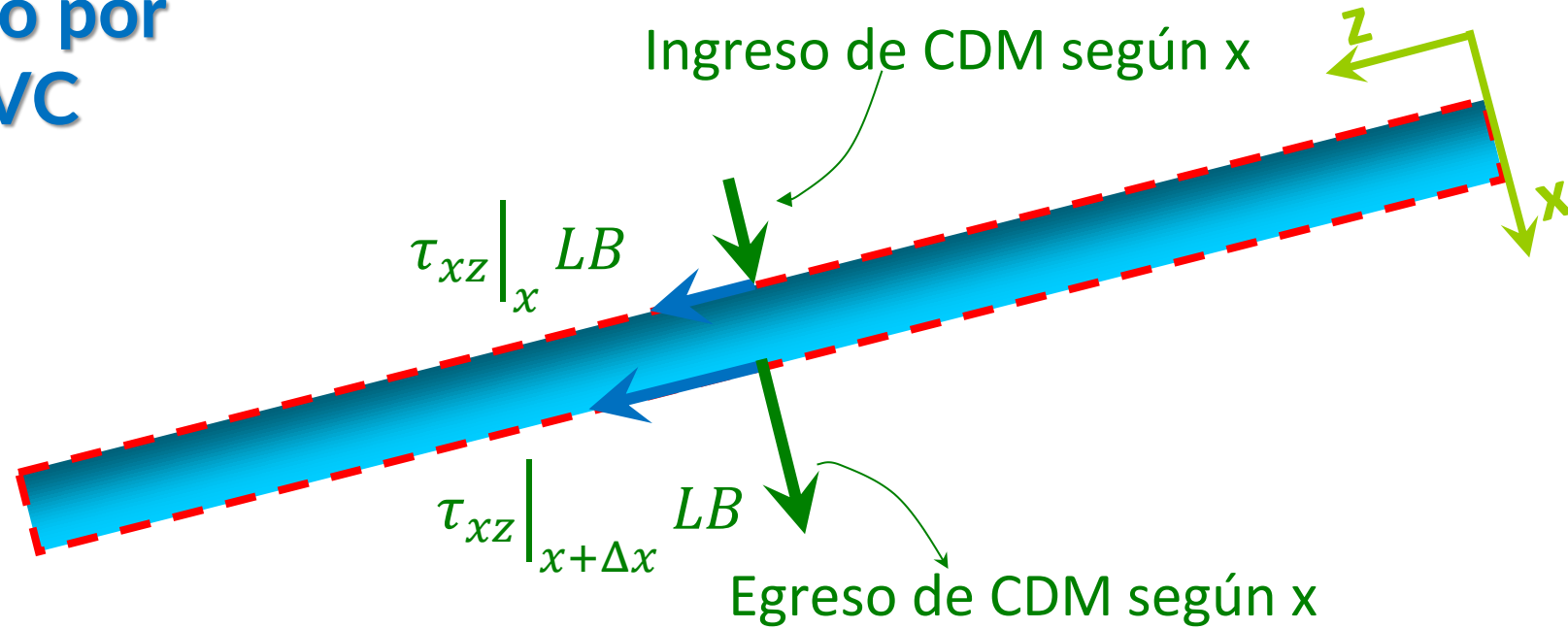
Balance de cantidad de movimiento en dirección "z"

Ingreso y egreso con el flujo



Balance de cantidad de movimiento en dirección "z"

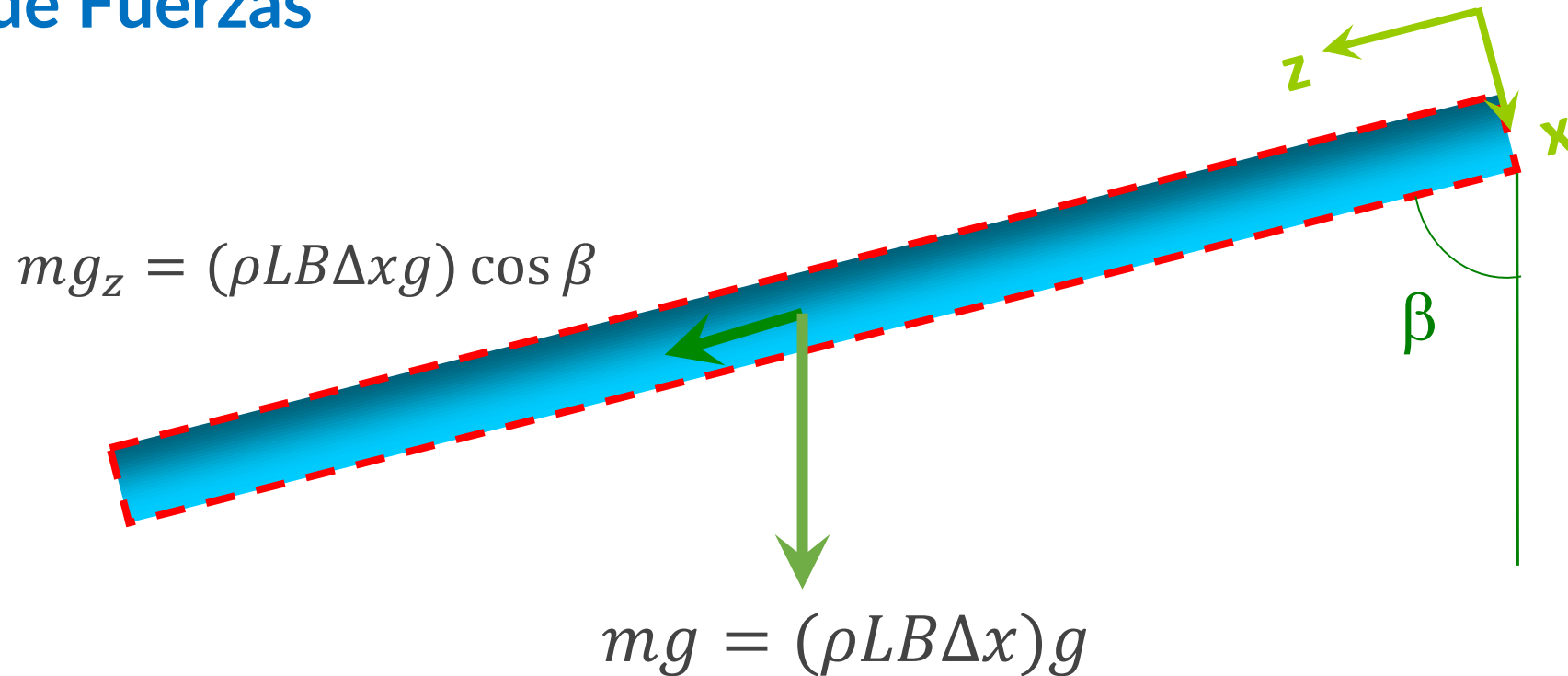
Ingreso y egreso por la frontera del VC



Las entradas y las salidas se eligen según la dirección del eje. La CDM entra en "x" y sale en "x+ Δx ", independientemente del sentido real de transferencia de la CDM.

Balance de cantidad de movimiento en dirección "z"

Sumatoria de Fuerzas en el VC



Balance de cantidad de movimiento en dirección "z"

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{vel de entrada} \\ \text{de C.de M. al VC} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{vel de salida de} \\ \text{C.de M. del VC} \end{array} \right\} + \sum_{\text{sobre el sistema}} \text{Fuerzas} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$$

$$\left[\rho \Big|_{z=0} v_z \Big|_{z=0} B \Delta x \right] v_z \Big|_{z=0} + \tau_{xz} \Big|_x LB - \left[\rho \Big|_{z=L} v_z \Big|_{z=L} B \Delta x \right] v_z \Big|_{z=L} - \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} LB + (\rho LB \Delta x g) \cos \beta = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$$

Estado estacionario $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = 0$

Fluido incompresible y flujo desarrollado $\rho \Big|_{z=0} v_z^2 \Big|_{z=0} = \rho \Big|_{z=L} v_z^2 \Big|_{z=L}$

$$\tau_{xz} \Big|_x \cancel{LB} - \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} \cancel{LB} + (\rho g \cos \beta \cancel{LB} \Delta x) = 0$$

$$\tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz} \Big|_x = (\rho g \cos \beta \Delta x)$$

Balance de cantidad de movimiento en dirección "z"

Paso 4: Obtener la ecuación diferencial para el esfuerzo cortante...

$$\frac{\tau_{xz}|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}|_x}{\Delta x} = \rho g \cos \beta$$

Tomando el límite para cuando Δx tiende a 0.... $\Rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \rho g \cos \beta$

Integrando: $\tau_{xz} = \rho g \cos \beta \cdot x + C_1$

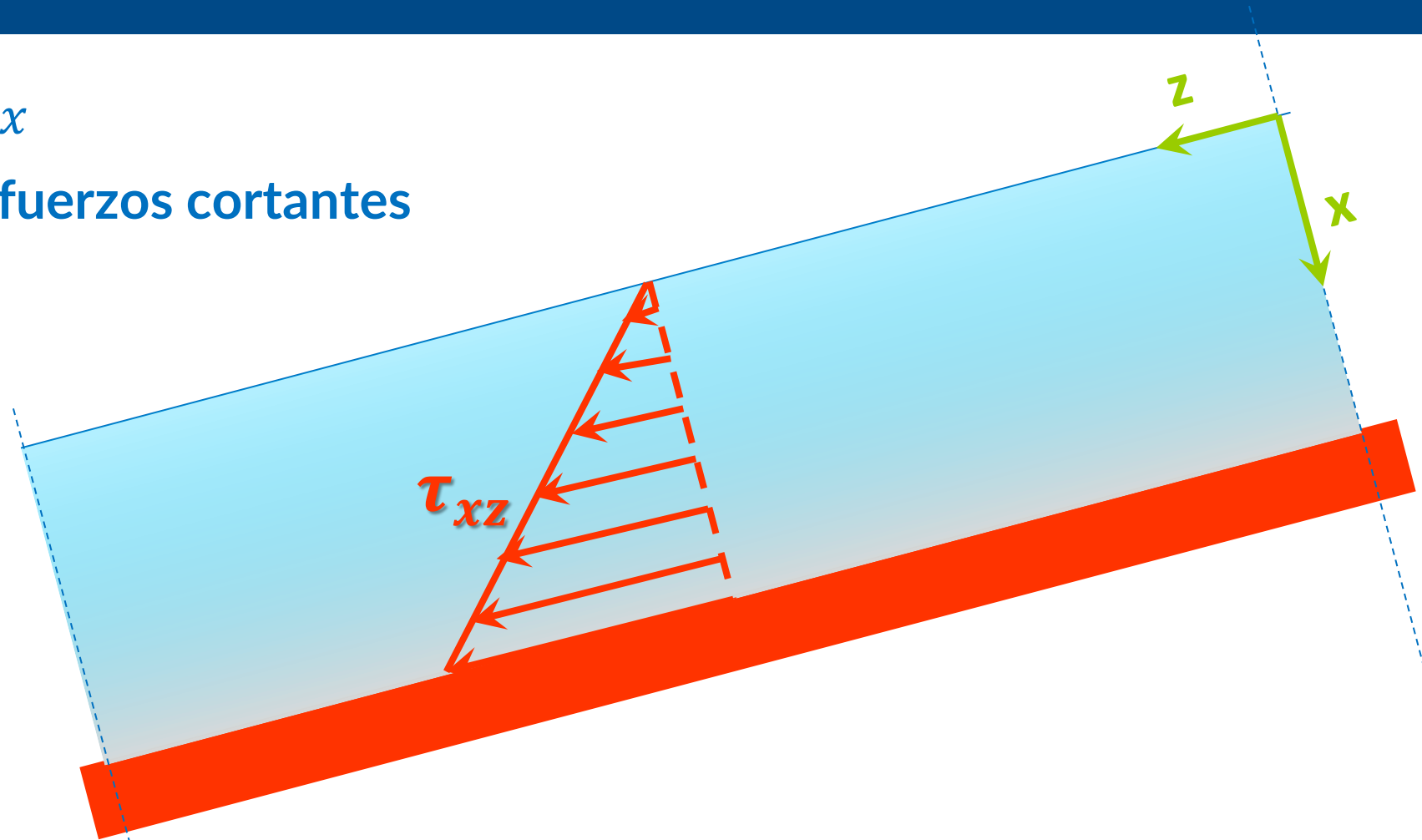
Condición de contorno: Interfase líquido-gas $\tau_{xz}|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\tau_{xz} = \rho g \cos \beta \cdot x$$

Balance de cantidad de movimiento en dirección "z"

$$\tau_{xz} = \rho g \cos \beta \cdot x$$

Es el perfil de esfuerzos cortantes según z



Balance de cantidad de movimiento en dirección “z”

Paso 5: Introducir la ecuación constitutiva que relaciona el τ con el gradiente de velocidades

Fluido Newtoniano $\tau_{xz} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x}$ Ley de Newton de la viscosidad para flujo unidireccional

Igualando: $\tau_{xz} = \rho g \cos \beta \cdot x = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x}$

$\Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{\rho g \cos \beta \cdot x}{\mu}$

Balance de cantidad de movimiento en dirección “z”

Paso 6: Integrar para hallar el perfil de velocidades

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{\rho g \cos \beta \cdot x}{\mu}$$

Integrando:
$$v_z = -\frac{\rho g \cos \beta}{\mu} \frac{x^2}{2} + C_2$$

Determinación de las constantes con las condiciones de contorno:

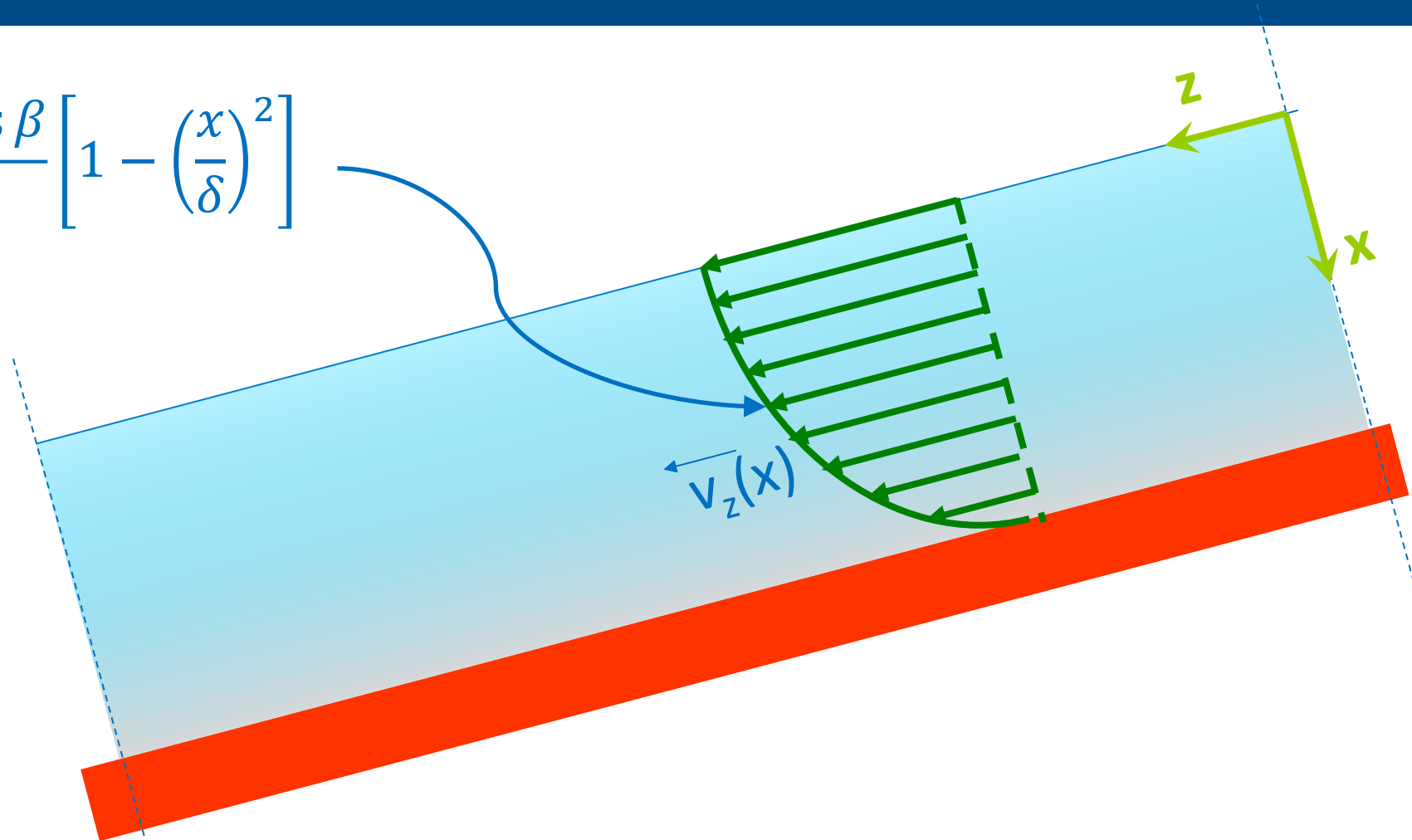
Condición de no deslizamiento:
$$v_z \Big|_{x=\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{\rho g \cos \beta \delta^2}{2\mu}$$

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

Es el perfil de velocidades: $v_z=f(x)$

Balance de cantidad de movimiento en dirección "z"

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$



Cálculo de magnitudes de interés

Velocidad máxima

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

La v_{\max} se obtiene cuando $x=0$ (en la superficie del fluido)

$$v_{z,\max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu}$$

Cálculo de magnitudes de interés

Velocidad media

$$\langle v_z \rangle = \frac{\iint_{A_{\text{flujo}}} v_z \cdot \partial A_{\text{flujo}}}{\iint_{A_{\text{flujo}}} \partial A_{\text{flujo}}}$$

donde $\partial A_{\text{flujo}} = \partial x \partial y$

$$\Rightarrow A_{\text{flujo}} = B\delta$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^B \int_0^\delta v_z \cdot \partial x \partial y}{\int_0^B \int_0^\delta \partial x \partial y} = \frac{1}{B\delta} \int_0^B \int_0^\delta v_z \cdot \partial x \partial y \quad \Rightarrow \quad \langle v_z \rangle = \frac{1}{B\delta} B \int_0^\delta \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \partial x$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu}$$

La relación entre v_{max} y $\langle v_z \rangle$ es:

$$\frac{\langle v_z \rangle}{v_{z,\text{max}}} = \frac{2}{3}$$

Cálculo de magnitudes de interés

Caudal volumétrico Q (m^3/s)

$$Q = \iint_{A_{flujo}} v_z \cdot \partial A_{flujo} \quad \Rightarrow \quad Q = \langle v \rangle B \delta$$

$$Q = B \delta \langle v_z \rangle = \frac{\rho g B \delta^3 \cos \beta}{3\mu}$$

Velocidad másica de flujo o flujo másico ω (Kg/s)

$$\omega = Q \cdot \rho$$

$$\omega = \frac{\rho^2 g B \delta^3 \cos \beta}{3\mu}$$

Cálculo de magnitudes de interés

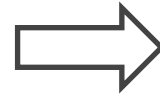


Fuerza que el fluido realiza sobre la placa inclinada

$$F_z|_{x=\delta} = \int_{A_{fricción}} \tau_{xz}|_{x=\delta} \partial A_{fricción} = \int_{yz} \tau_{xz}|_{x=\delta} \partial A_{yz} \quad F_z|_{x=\delta} = \int_0^L \int_0^B \tau_{xz}|_{x=\delta} \partial y \partial z$$

$$F_z|_{x=\delta} = \rho(\delta LB) g \cos \beta$$

Fuerza que el fluido ejerce sobre la placa



$$F_z|_{x=\delta} = -\rho(\delta LB) g \cos \beta$$

Fuerza que la placa ejerce sobre el fluido

...véase que la fuerza que el fluido ejerce sobre la placa es la componente z del peso del fluido

Muchas gracias por tu
atención

 www.fing.edu.uy

   /fingudelar



FACULTAD DE
INGENIERÍA



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY