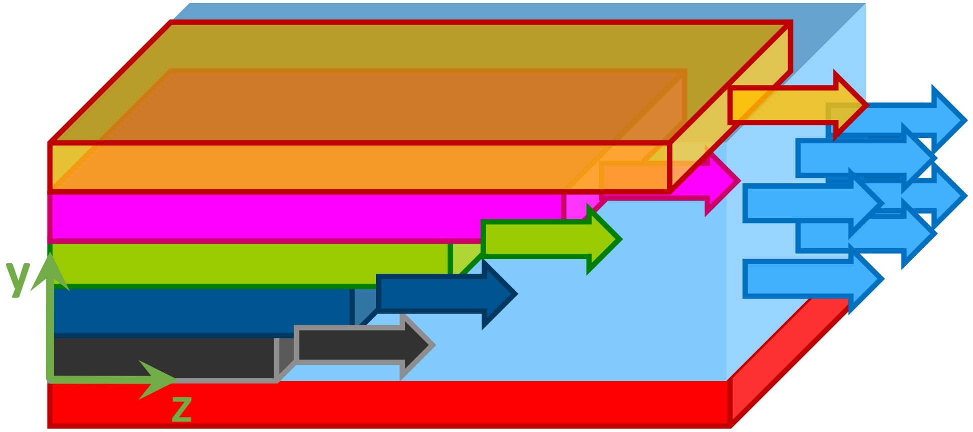
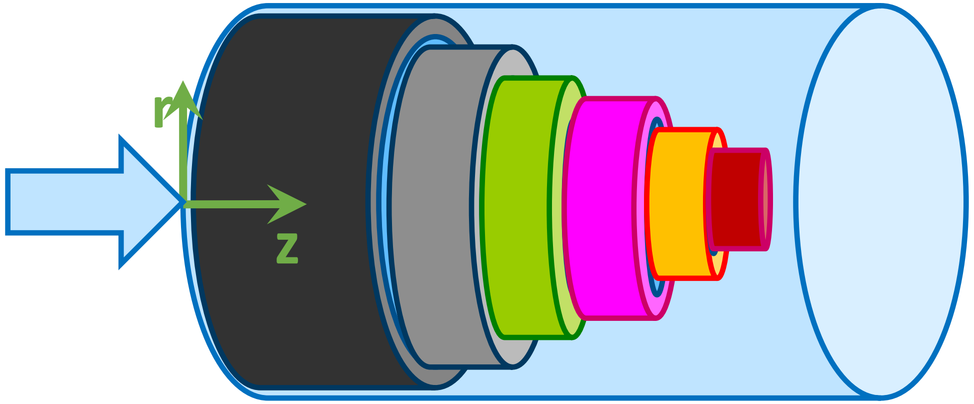
Balances de envoltura – Distribución de velocidades y de esfuerzos

Capítulo 2 - Bird

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Flujo laminar

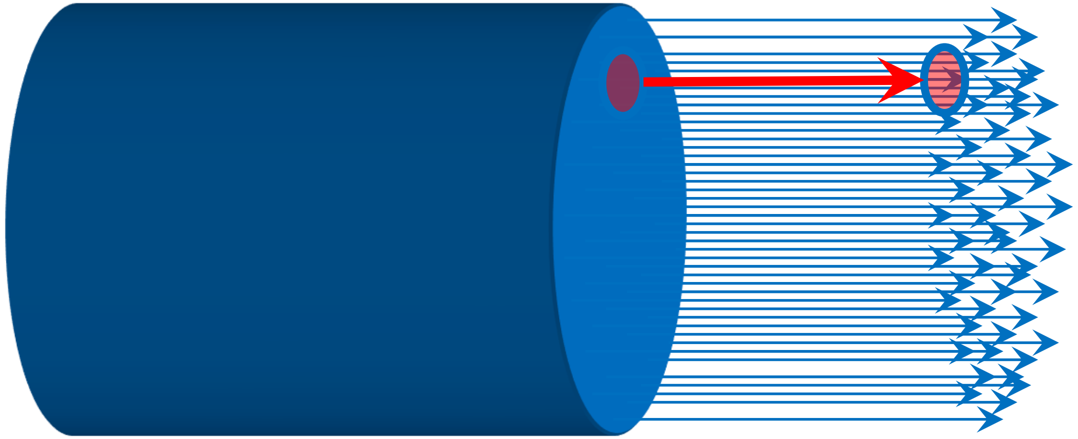




Es un flujo ordenado, donde capas de fluido deslizan una sobre las otras.

No hay mezcla de fluido en las direcciones perpendiculares al movimiento.

Se produce a velocidades bajas.



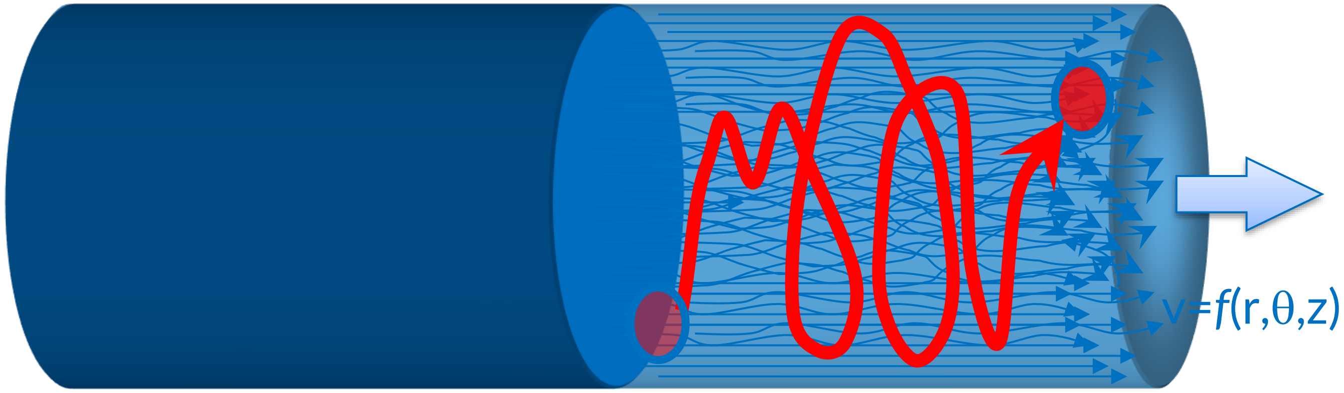
Flujo turbulento

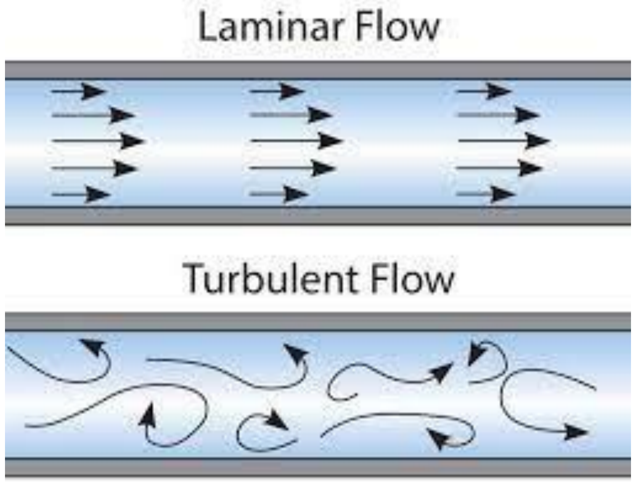
Es un flujo desordenado.

No se identifican capas de fluido. Todo el fluido está mezclado en cualquier sección del tubo.

Aunque el movimiento del fluido sea en una sola dirección, el vector velocidad tiene componentes no nulos en los tres ejes.

Se da a altas velocidades.





https://www.youtube.com/watch?v=xFCXGXOHO_s

Número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{\text{Fuerzas de inercia asociadas a la energía cinética del fluido}}{\text{Fuerzas viscosas asociadas al rozamiento}}$$

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho\, v_c L_c}{\mu}}$$

donde: v_c *es la velocidad característica del sistema*
L_c *es la longitud característica del sistema*

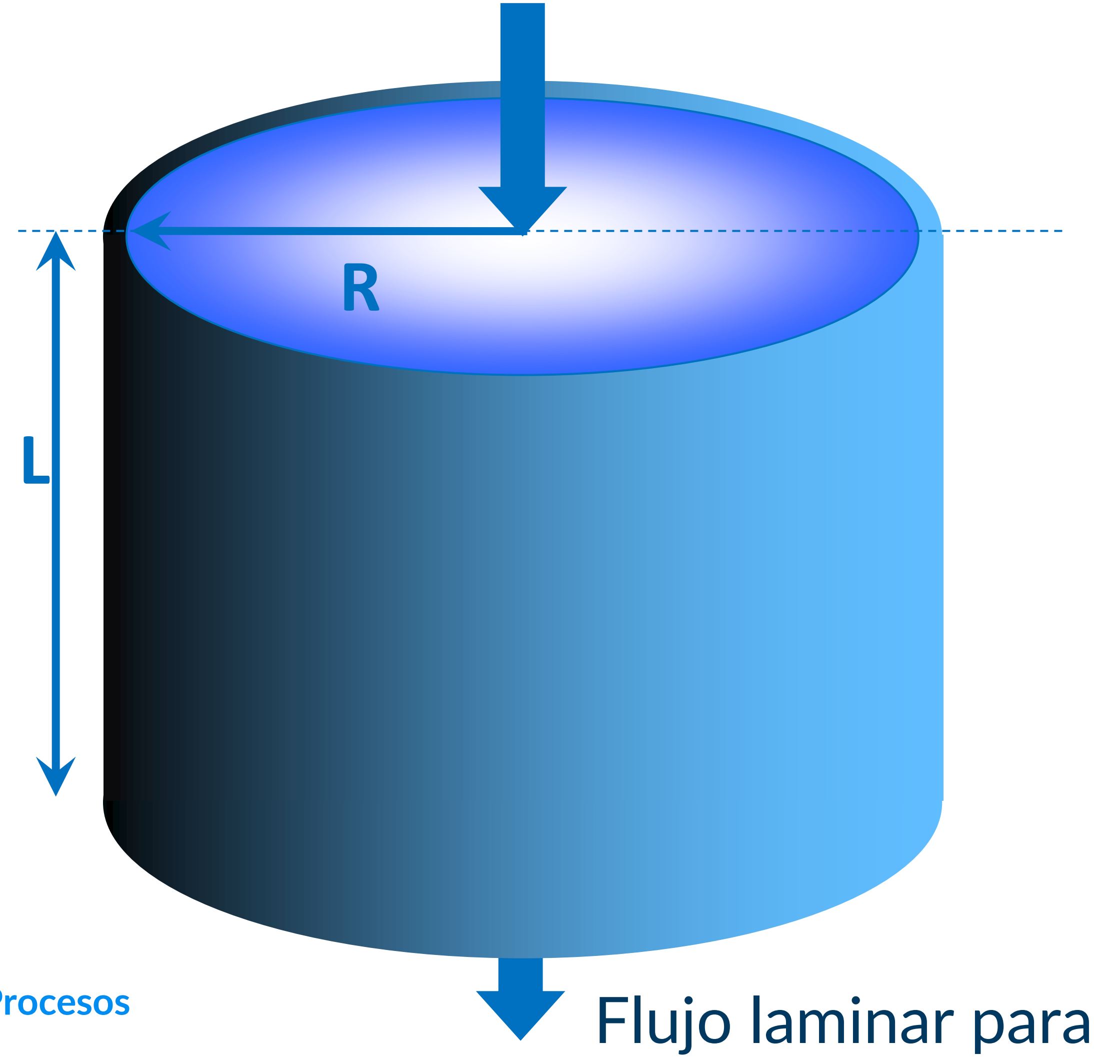
En un tubo: $\boldsymbol{v_c = \langle v \rangle,\ Lc = D}$

Si Re < 2100 -> Régimen laminar
Si 2100 < Re < 10.000 -> Régimen en transición
Si Re > 10.000 -> Régimen turbulento

Distribución de velocidades en un tubo en régimen laminar

Fluido newtoniano e incompresible

Flujo laminar en un tubo



Flujo laminar paralelo al tubo

Flujo laminar en un tubo

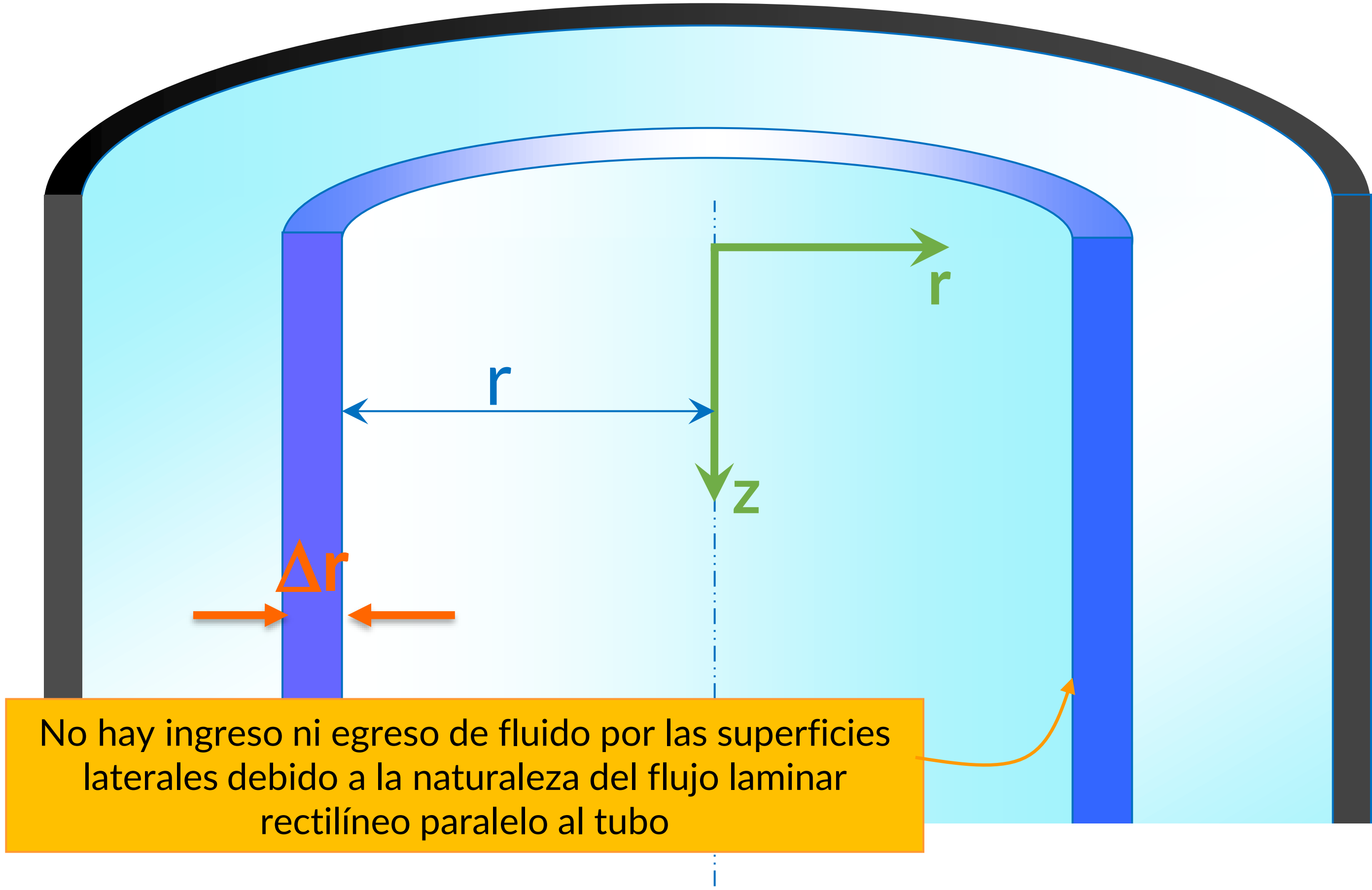
El fluido solo se mueve hacia abajo, por tanto la velocidad solo puede tener componente en el eje z.

$$\vec{v} = [v_r \quad v_\theta \quad v_z] = [0 \quad 0 \quad v_z]$$

$$v_z = f(r)$$

Debido a la simetría v_z (r) no depende de θ

¿Cómo es el volumen de control a utilizar?



Balance de masa en el volumen de control

¿Área de flujo?

$$A_F = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2$$

$$A_F = \pi(r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2) - \pi r^2$$

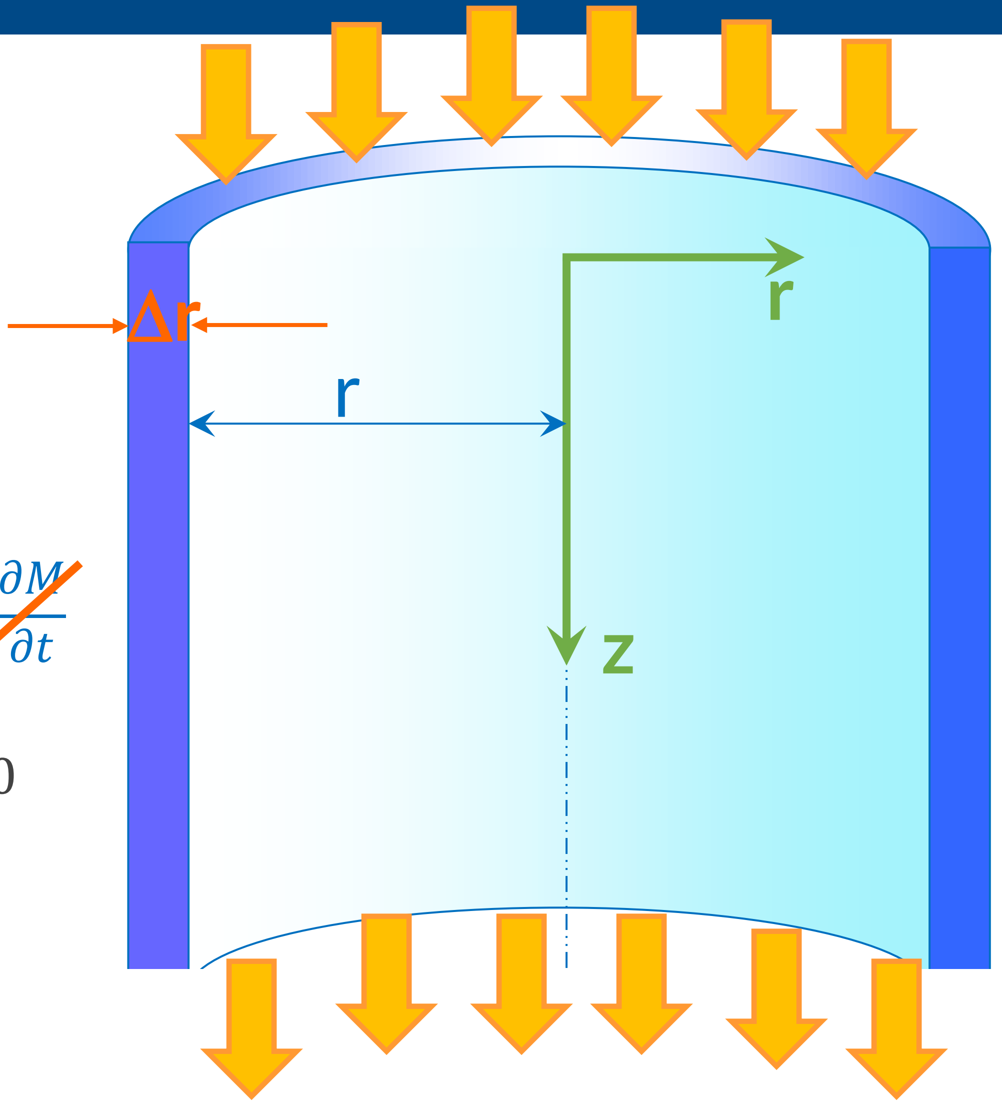
$$A_F = \pi(2r\Delta r + \Delta r^2)$$

$\Delta r \to 0$ $\boxed{A_F \approx 2\pi r\Delta r}$

Balance de masa $\begin{Bmatrix}\text{vel de ent. de}\\ \text{MASA al VC}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\text{vel de sal. de}\\ \text{MASA del VC}\end{Bmatrix} = \cancel{\dfrac{\partial M}{\partial t}}$

$$\rho\,\cancel{(2\pi r\Delta r)}\Big|_{z=0} v_z\Big|_{z=0} - \rho\,\cancel{(2\pi r\Delta r)}\Big|_{z=L} v_z\Big|_{z=L} = 0$$

$$v_z\Big|_{z=0} = v_z\Big|_{z=L} \;\therefore\; \boldsymbol{v_z \neq f(z)}$$



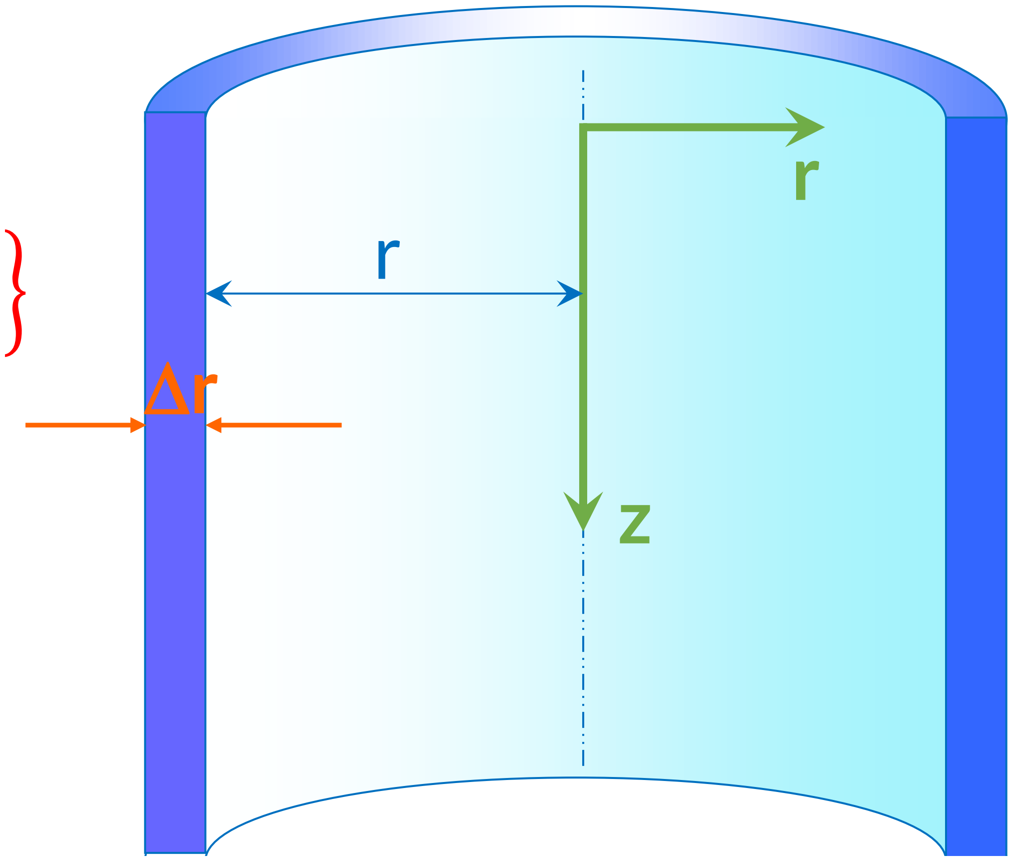
Estado estacionario

Fluido incompresible

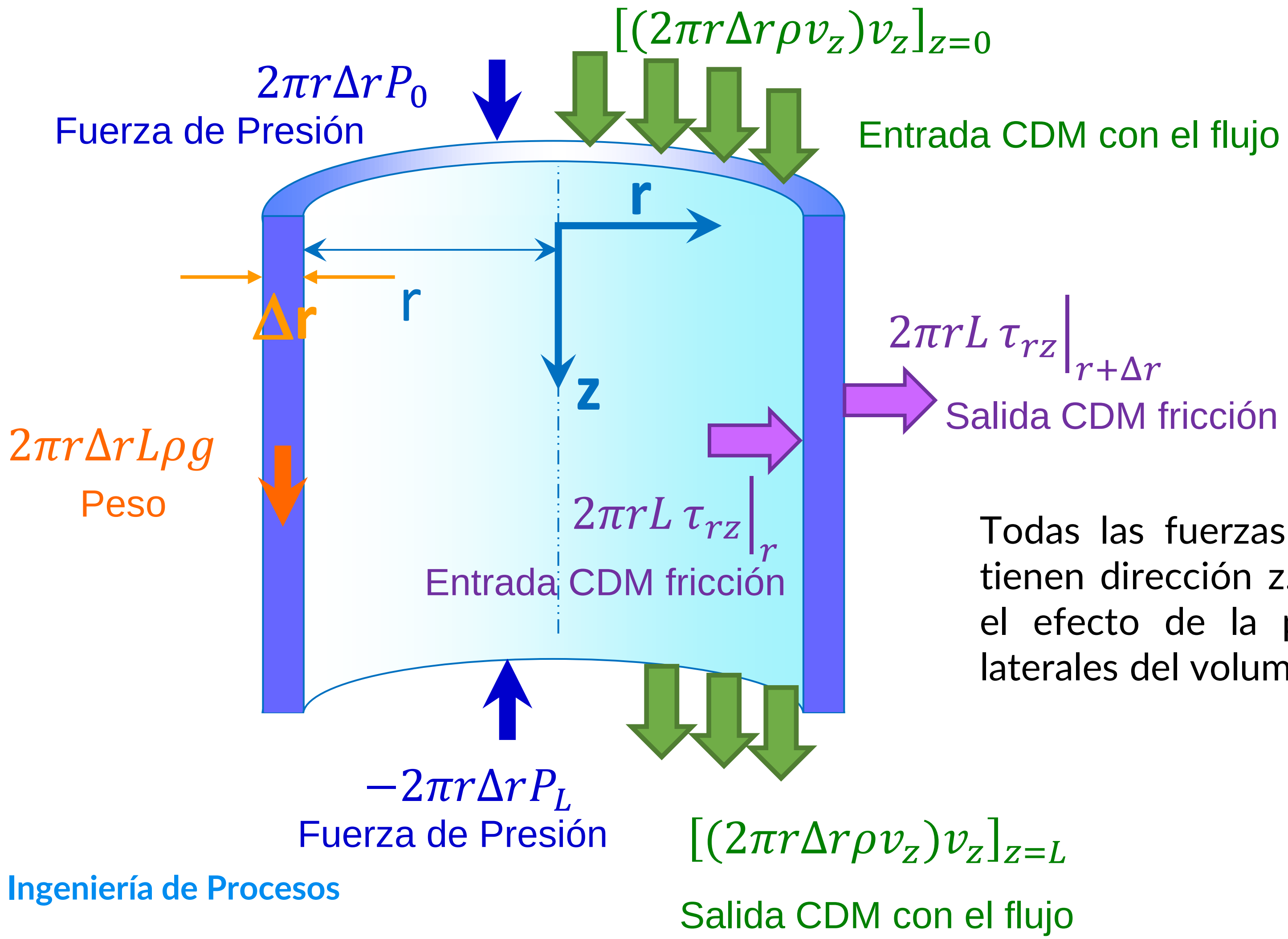
Balance de CDM en el volumen de control

$$\left\{\begin{matrix} velocidad\ de\ entrada \\ de\ CDM\ al\ VC \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} velocidad\ de\ salida \\ de\ CDM\ del\ VC \end{matrix}\right\}$$

$$+\sum Fuerzas_{en\ el\ VC} = 0$$



Balance de CDM “z” en el volumen de control



Todas las fuerzas / esfuerzos considerados tienen dirección z. Por eso no consideramos el efecto de la presión en las superficies laterales del volumen de control.

Balance de CDM "z" en el volumen de control

$$\cancel{(2\pi r\Delta r\rho v_z)_{z=0}}(v_z)_{z=0} - \cancel{(2\pi r\Delta r\rho v_z)_{z=L}}(v_z)_{z=L} +$$

$$+(\cancel{2\pi} rL\tau_{rz})_r - (\cancel{2\pi} rL\tau_{rz})_{r+\Delta r} +$$

$$+(\cancel{2\pi} r\Delta rP_0) - (\cancel{2\pi} r\Delta rP_L) + \cancel{2\pi} r\Delta rL\rho g = 0$$

Reordenando $$\frac{(r\tau_{rz})_{r+\Delta r} - (r\tau_{rz})_r}{\Delta r} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)r$$

Tomando el límite para cuando $\Delta r \to 0$....

$$\boxed{\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)r}$$

Balance de CDM "z" en el volumen de control

Integrando:

$$r\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)\frac{r^2}{2} + C_1$$

$$\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

Cuando r $\rightarrow$ 0, τ_{rz} es finito (vale 0), entonces C_1=0

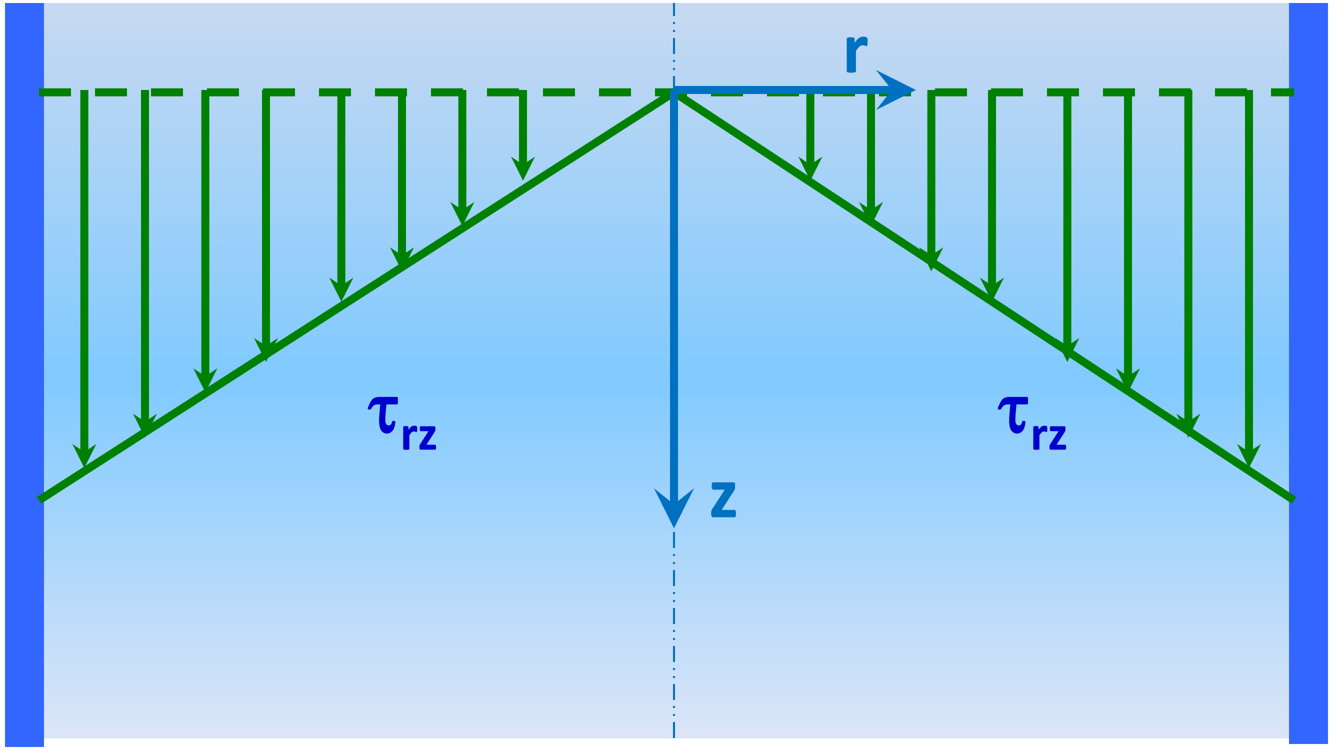
$$\boxed{\tau_{rz} = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g\right)\frac{r}{2}}$$

Perfil lineal de esfuerzos

$$\boxed{\tau_{rz} = \left(\frac{\wp_0 - \wp_L}{2L}\right)r}$$

$donde\ \ \wp = P - \rho g z$

Balance de CDM “z” en el volumen de control



Perfil lineal de esfuerzos

Perfil de velocidades

El fluido es newtoniano y escurre en régimen laminar, por lo que se cumple la ley de newton de la viscosidad

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

Fluido Newtoniano y Régimen Laminar

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\wp_0 - \wp_L}{2L}\right) r = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\left(\frac{\wp_0 - \wp_L}{2\mu L}\right) r$$

Perfil de velocidades

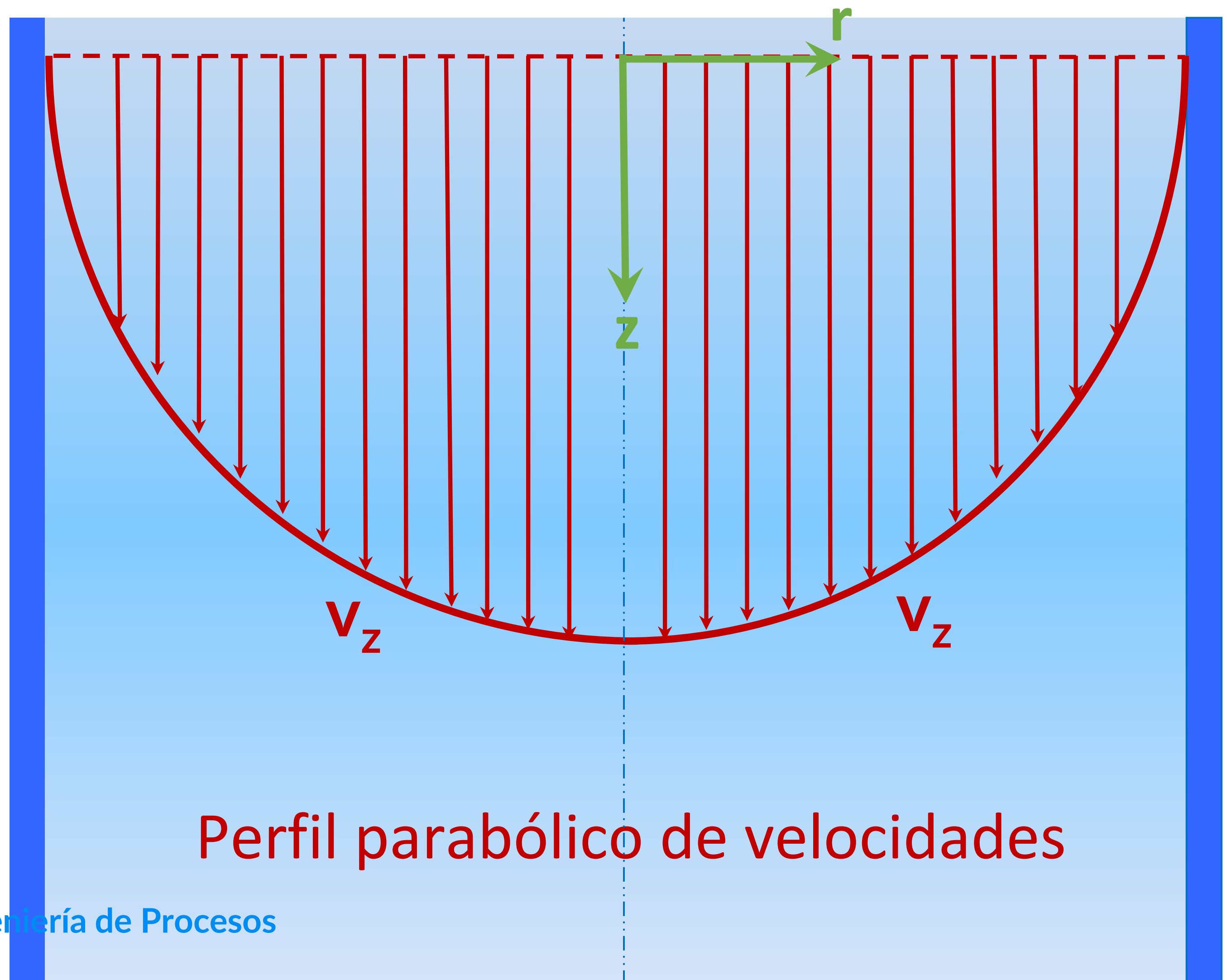
Integrando: $v_z = -\left(\frac{\wp_0 - \wp_L}{2\mu L}\right)\frac{r^2}{2} + C_2$

Condición de contorno: En r = R $\rightarrow$ $v_z = 0$ $\Rightarrow C_2 = \left(\frac{\wp_0 - \wp_L}{2\mu L}\right)\frac{R^2}{2}$

$$\boxed{v_z = \frac{(\wp_0 - \wp_L)R^2}{4\mu L}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}$$

Perfil parabólico de velocidades

Perfil de velocidades



Velocidad máxima

$$v_z = \frac{(\wp_0 - \wp_L)R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

La v_{max} se obtiene cuando r=0 (en el centro del tubo)

$$\boxed{v_{z,max} = \frac{(\wp_0 - \wp_L)R^2}{4\mu L}}$$

Velocidad media

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_A v_z \cdot \partial A_{Flujo}}{\int_A \partial A_{Flujo}} = \frac{1}{A_{Flujo}} \int_A v_z \cdot \partial A_{Flujo}$$

En coordenadas cilíndricas el diferencial AREA DE FLUJO es: $\partial A_{Fl} = r\partial r\partial\theta$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_z \cdot r\partial r\partial\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\partial r\partial\theta} = \frac{2\pi}{\pi R^2}\int_0^R v_z \cdot r\partial r$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{2}{R^2}\frac{(\wp_0 - \wp_L)R^2}{4\mu L}\int_0^R 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot r\partial r$$

$$\boxed{\langle v_z \rangle = \frac{(\wp_0 - \wp_L)R^2}{8\mu L}}$$

$$v_{z,max} = \frac{(\wp_0 - \wp_L)R^2}{4\mu L}$$

La relación entre v_{max} y $<v_z>$ es: $\boxed{\dfrac{\langle v_z \rangle}{v_{z,\max}} = \dfrac{1}{2}}$

Caudal volumétrico

Velocidad volumétrica de flujo o caudal volumétrico Q

$$Q = \int_A v_z \cdot dA \quad \therefore \quad Q = \langle v_z \rangle \cdot A$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi(\wp_0 - \wp_L)R^4}{8\mu L}}$$ **Ley de Hagen-Poiseuille**

Fuerza que el fluido realiza sobre las paredes del tubo

$$\mathrm{F_z}\Big|_{r=R} = \int_{A_{fricción}} \tau_{\mathrm{rz}}\Big|_{r=R} \partial A_{fricción}$$

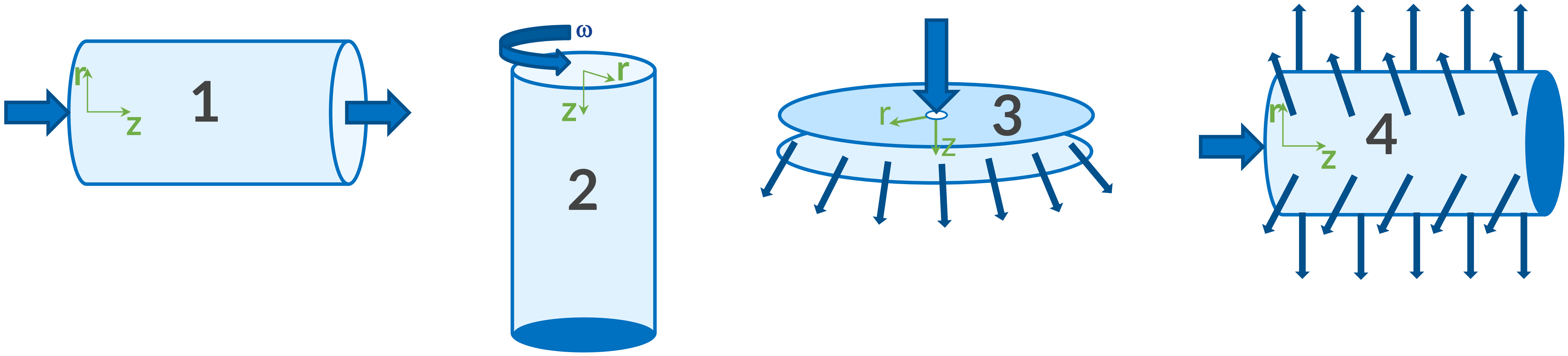
En coordenadas cilíndricas el diferencial área de fricción es el diferencial área lateral, que en este caso es: $\partial A_{fr} = R\partial\theta\partial z$

$$\mathrm{F_z}\Big|_{r=R} = \int_0^{2\pi}\int_0^{L} \tau_{\mathrm{rz}}\Big|_{r=R} R\partial z\partial\theta$$

$$\boxed{\mathrm{F_z}\Big|_{r=R} = (\wp_0 - \wp_L)\pi R^2}$$

Ejercicio: Areas de flujo y áreas de fricción

En los siguientes sistemas, escribir los diferenciales área de flujo y área de fricción en función de las coordenadas r, θ y z, e integrarlos para obtener las áreas respectivas.



Muchas gracias por tu atención.