

Práctico 3 - Series de Potencia

1. Hallar el radio de convergencia y una fórmula explícita para la función suma en los siguientes casos:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+i) z^n$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^n$

2. Expandir en potencias de z las siguientes funciones y encontrar el radio de convergencia de cada una:

a) $\frac{1}{(1-z)^2}$ b) $\frac{1}{(1+z)^5}$ c) $\frac{1}{4+z}$ d) $\frac{z+2}{(1+3z)^2}$

3. Consideremos la serie de potencia de la forma

$$\frac{1}{2}z + z^2 + \frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{32}z^5 + \frac{1}{16}z^6 + \frac{1}{128}z^7 + \frac{1}{64}z^8 + \dots$$

Calcular el radio de convergencia.

4. a) ¿Se puede definir $\log(1-z)$ de manera continua en el disco de radio 1?
 b) Hallar radio de convergencia y fórmula explícita para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.
5. a) Consideremos dos series de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$ con radios de convergencia $R_a, R_b > 0$. Probar que si existe un abierto U entorno de z_0 , con $U \subset B(z_0, R_a) \cap B(z_0, R_b)$ tal que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in U$$

entonces $a_n = b_n \quad \forall n$.

- b) Supongamos que $f(z)$ es una función analítica y que en un entorno de cero es desarrollable en series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Demuestre que si $f(z)$ es par entonces $a_n = 0$ para todo n impar y que si $f(z)$ es impar entonces $a_n = 0$ para todo n par.
6. Este ejercicio muestra otra forma de ver que e^z coincide con la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Es por esto que la idea es que tomen la definición de e^z como $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

- a) Sea $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = e^x$. Pruebe utilizando el teorema de Taylor y del resto de Lagrange que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- b) ¿Converge la serie de potencias anterior uniformemente a g en \mathbb{R} ? ¿Y en un compacto? (Sugerencia: ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie?)
- c) Sea $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$. Demuestre que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Para esto asumir que si $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas que coinciden en el eje real entonces $f = g$.