Ej que quedó del Parcial

4 dígitos $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$, $d_i \in \{1, 2, \dots, 9\}$

(9 opciones)

¿de cuántas formas puedo elegir d_1, d_2, d_3 y d_4?

Obs: encararlo por árboles y regla de la suma y el producto puede ser muy complicado

$d_1 \to 9$ opciones, d_2 depende de d_1, ...

Podemos pensar en el conjunto $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$

Si elijo este conjunto ya queda determinado cuál es d_1 (el más chico), d_2 (el siguiente), d_3 (el siguiente a d_2) y d_4 (el último)

Como además $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ estricto, son todos diferentes, entonces $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ tiene 4 elementos. Esto lo puedo elegir de C_4^9 formas

$$C_4^9 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = \boxed{126} \quad \checkmark$$

Práctico 6

Ej 8 c) Resolver

$$\frac{a_n}{a_{n-1}^p} = 2 \quad , \quad p \in \mathbb{Z},\ p > 1 \quad , \quad a_0 = 1$$

¿Podemos "transformar" esta ecuación en alguna que sabemos resolver?

Tenemos productos y exponentes (constantes)

Podemos transformarlos en sumas y multiplicación por constantes usando logaritmos. Usemos ln para el logaritmo en base e.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}^p} = 2 \iff \ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}^p}\right) = \ln 2$$

$$\iff \ln(a_n) - p \cdot \ln(a_{n-1}) = \ln 2$$

el cambio de variable

Sea $b_n = \ln(a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces $b_n - p\, b_{n-1} = \ln 2$

Es lineal con coeficientes constantes

La escribimos $b_{n+1} - p\, b_n = \ln 2$

Su polinomio característico es $x - p$

$\Rightarrow$ Las soluciones de la ecuación (raiz $x=p$)

homogénea $h_{n+1} - p h_n = 0$ son

de la forma $h_n = c \cdot p^n$, con $c \in \mathbb{R}$

(porque $p^{n+1} = p \cdot p^n$)

Ahora buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea. Como el término independiente es $\ln 2$ (constante), busquemos una solución $b_n^* = \alpha$ (constante)

Sustituyendo en la ecuación

$b_{n+1}^* - p\, b_n^* = \ln 2$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha - p\alpha = \ln 2$$

$$\Updownarrow$$

$$(1-p)\alpha = \ln 2$$

(como $p>1$, puedo dividir entre $1-p$)

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{1-p}$$

Entonces una solución es $b_n^* = \dfrac{\ln 2}{1-p}$

Ahora, la solución general va a ser

$$b_n = b_n^* + h_n = \frac{\ln 2}{1-p} + c p^n$$

Hallamos c con la condición inicial

$$b_0 = \ln(a_0) = \ln(1) = 0$$

$$b_0 = \frac{\ln 2}{1-p} + c \cdot \overbrace{p^0}^{1} \;'' \Leftrightarrow c = \frac{-\ln 2}{1-p}$$

Sustituyendo c,

$$b_n = \frac{\ln 2}{1-p} - \frac{\ln 2}{1-p} p^n = \frac{\ln 2}{1-p}(1-p^n)$$

$$= \ln 2 \cdot \frac{1-p^n}{1-p}$$

Ahora volvemos al problema original

$b_n = \ln(a_n)$, queremos despejar a_n

Tomamos exponencial

$$e^{b_n} = e^{\ln(a_n)} = a_n$$

$$a_n = e^{b_n} = e^{\ln 2 \cdot \frac{1-p}{1-p^n}} = 2^{\frac{1-p}{1-p^n}} = 2^{\frac{p-1}{p^n-1}}$$

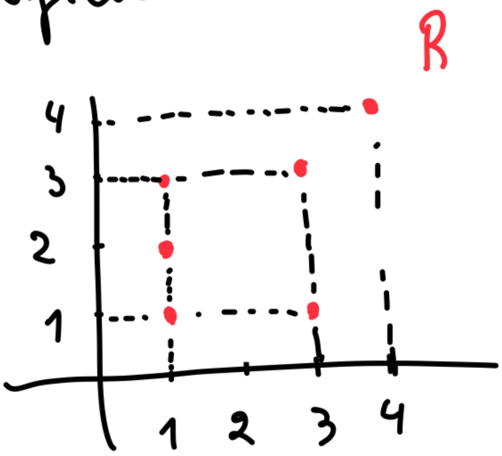
Práctico 7

Primero vamos a agarrar una relación y representarla de las formas que vimos.

Tomemos la del Ej 1 c)

$$R = \{(1,3), (1,1), (3,1), (1,2), (3,3), (4,4)\}$$

Gráficamente



Matriz binaria booleana de 0s y 1s

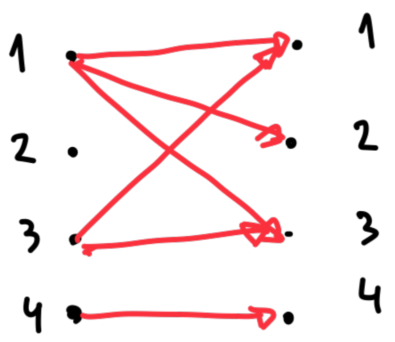
1=V
0=F

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

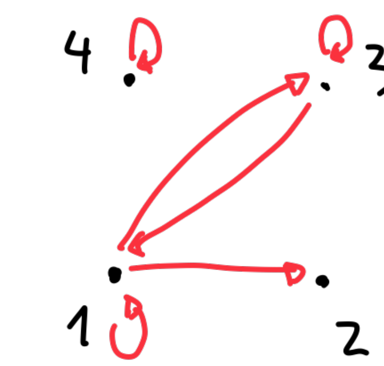
si pinto los 1s de rojo, queda lo mismo que la gráfica pero girado

También la podemos representar con digrafos

Si separamos dominio y codominio (como en funciones)



Si usamos que el dominio y el codominio son iguales

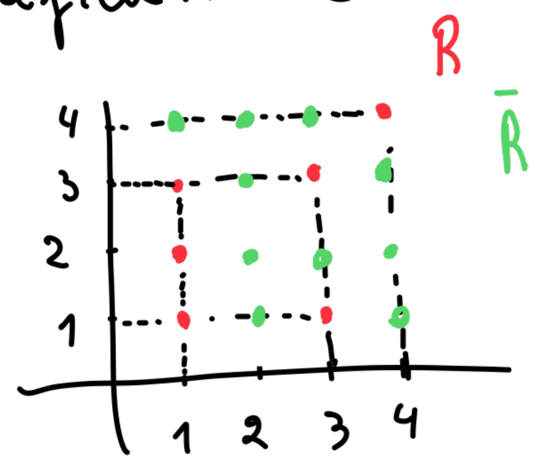


Representemos su relación complementaria

$\overline{R}$ = {todos los pares que no están en R}

$$\overline{R} = \{(1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

Gráficamente

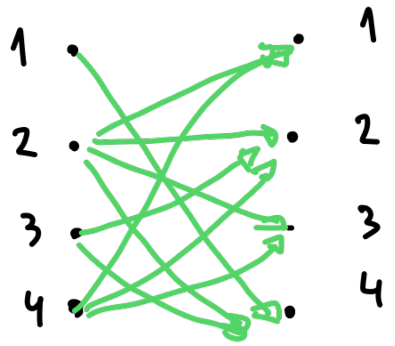


Matriz binaria

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

con digrafos

Si separamos dominio y codominio (como en funciones)



Si usamos que el dominio y el codominio son iguales