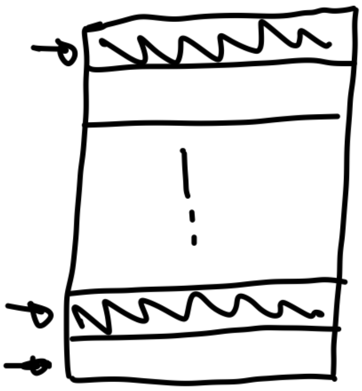
Volviendo al Práctico 6, Ejercicio 3:

c) No puede haber dos franjas seguidas iguales, y tampoco la primera y la última

$a_n = \#\{$banderas de n franjas sin dos seguidas iguales y sin la primera y la última iguales$\}$



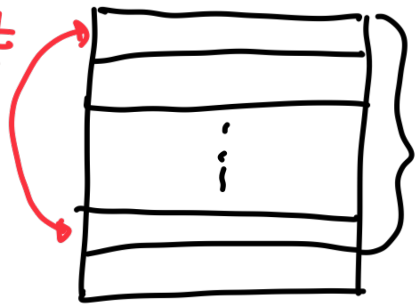
Para elegir el color de la n-ésima franja, tengo que mirar la anterior $(n-1)$ y la primera

Separemos en dos casos

- Si la primera y la $(n-1)$-ésima son iguales, tengo 3 opciones para la n-ésima

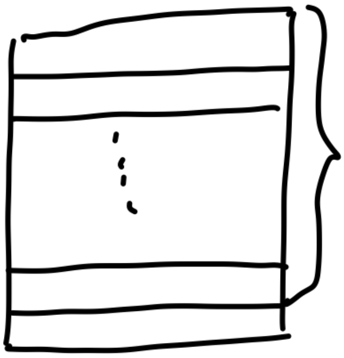
- Si la primera y la $(n-1)$-ésima son diferentes, tengo 2 opciones para la n-ésima → a_{n-1}

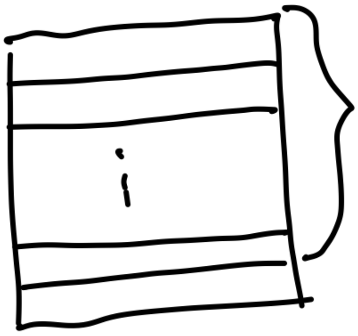
#

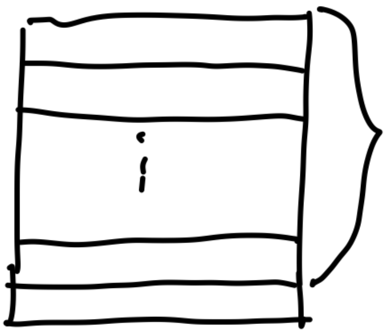


Este trozo de bandera está contado en a_{n-1}

El caso es un poquito menos simple

\#  todas estas banderas con $n-1$ franjas y sin franjas seguidas iguales $= 4\cdot 3^{n-2}$ (por la parte anterior)

$= \#$  Banderas con $n-1$ franjas sin franjas seguidas iguales y con primera y $(n-1)$-ésima iguales

$+ \#$  Banderas con $n-1$ franjas sin franjas seguidas iguales y con primera y $(n-1)$ésima diferentes $= a_{n-1}$

Esta regla de la suma nos da que $= 4\cdot 3^{n-2} - a_{n-1}$

Juntando todo:

$$a_n = 2\,a_{n-1} + 3\left(4\cdot 3^{n-2} - a_{n-1}\right)$$

Ahora la escribimos de la forma en que la sabemos resolver

$$a_n = 2a_{n-1} + 3\cdot 4\cdot 3^{n-2} - 3a_{n-1}$$

$$= -a_{n-1} + 4\cdot 3^{n-1}$$

$$a_n + a_{n-1} = 4\cdot 3^{n-1}$$ $\forall n \geq 1$, pero si cambio n por $n-1$

$$a_{n+1} + a_n = 4\cdot 3^n \quad \forall n \geq 0$$

Nos quedó una recurrencia no homogénea de orden 1

La resolvemos en dos pasos

1) Resolvemos (H) $h_{n+1} + h_n = 0$

Todas las soluciones de (H) son

$$h_n = c(-1)^n$$

2) Buscamos una solución particular de (*). Observamos el término independiente $4 \cdot 3^n$

Busquemos entonces una solución

$a_n^* = \alpha \cdot 3^n$ ¿para cuál α?

Sustituimos en (*)

$$a_{n+1}^* + a_n^* = 4 \cdot 3^n$$

$$\alpha \cdot 3^{n+1} + \alpha \cdot 3^n = 4 \cdot 3^n$$

Divido entre 3^n

$$\alpha \cdot 3 + \alpha = 4 \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1$$

Entonces $a_n^* = 3^n$

Entonces la solución general de ⊛ es

$$a_n = a_n^* + h_n = 3^n + c(-1)^n$$

Hallo c con una condición inicial

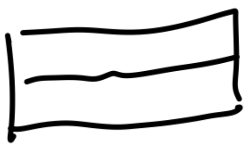
$$a_2 = 3^2 + c(-1)^2 = 12$$

↳ cantidad de banderas de dos franjas

$$9 + c = 12$$

$$c = 3$$

Entonces la solución es



$$\boxed{a_n = 3^n + 3(-1)^n}$$

Verifiquemos

$$a_3 = 3^3 + 3(-1)^3 = 27 - 3 = 24$$

Por otra parte, ¿cuántas banderas hay de 3 colores?

4 opciones
3 opciones
2 opciones

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ✓

Ejercicio 8

a) $a_n - n\, a_{n-1} = 0 \qquad a_0 = 1$

¿dónde metemos la n que está multiplicando, para que quede algo con coeficientes constantes?

Vamos a intentar definir una b_n en términos de a_n, que cumpla una ecuación que sepamos resolver

$b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

dividiendo entre a_{n-1}

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} - n\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} = 0$$

$$b_n - n = 0$$

$$b_n = n$$

$$\boxed{a_n = n!}$$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = n \Rightarrow a_n = n\, a_{n-1} \;,\; a_0 = 1$

$a_1 = 1 \cdot a_0 = 1,\; a_2 = 2 \cdot a_1 = 2,\; a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2$

b) $n a_n - (n-1) a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 2$ (*)

¿Qué pasa si definimos $b_n = n a_n$?

$b_{n-1} = (n-1) a_{n-1}$

Entonces (*) queda transformada en

$b_n - b_{n-1} = 0$

$b_n = b_{n-1}$, las soluciones de esto son $b_n = c$ (constante)

Volviendo a a_n (con la definición de b_n)

$b_n = n a_n = c \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{c}{n}}$

Si nos dan a_1 podemos hallar c

¿Dudas? verifico en la ecuación (*)

$n a_n - (n-1) a_{n-1} = n \cdot \frac{c}{n} - (n-1) \frac{c}{(n-1)}$

$= c - c = 0$ ✓