Práctico 6

Ej 5: Hallar a_{100}

a) $a_{n+1} - 3a_n = 0$, $a_{50} = 2 \cdot 3^{-8}$

El polinomio característico es $r-3$, su raíz es 3. Entonces todas las soluciones van a ser:

$$a_n = c \cdot 3^n \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Ahora despejamos la c que hace que la condición $a_{50} = 2 \cdot 3^{-8}$ se cumpla

$$a_{50} = c \cdot 3^{50} = 2 \cdot 3^{-8}$$

$$c = 2 \cdot \frac{3^{-8}}{3^{50}} = 2 \cdot 3^{-58}$$

Entonces la solución es

$a_n = 2 \cdot 3^{-58} \cdot 3^n$, si quiero lo escribo $2 \cdot 3^{n-58}$

$a_{100} = 2 \cdot 3^{100-58} = \boxed{2 \cdot 3^{42}}$

b) (*) $a_{n+2} + 4a_n = 0 \qquad a_0 = 1, \; a_1 = 1$

Sugerencia: como sólo aparecen $n+2$ y n, podemos definir $b_n = a_{2n}$, y queda

$$a_{2n+2} + 4a_{2n} = 0$$

$$a_{2(n+1)} + 4a_{2n} = 0$$

$$b_{n+1} + 4b_n = 0$$

Esto nos sirve porque nos interesa $a_{100} = b_{50}$

¿Qué ganamos? Pasamos de una recurrencia de orden 2 (que encima tiene raices no reales) a una recurrencia de orden 1.

¿Qué perdimos? Sólo estamos estudiando los términos pares de la sucesión.

Ahora la resolvemos:

(**) $b_{n+1} + 4b_n = 0$, Polinomio característico $r+4$, que tiene raiz -4

Entonces todas las soluciones de (**) son

$b_n = c(-4)^n$, $c \in \mathbb{R}$

Ahora nos fijamos en $a_0 = 1$, $a_1 = 1$

Este nos sirve

$b_0 = a_{2\cdot 0} = a_0 = 1$

$c\underbrace{(-4)^0}_{=1} = 1 \Rightarrow c = 1$

Entonces la solución de (*) con $b_0 = 1$, $a_0 = 1$ es

$b_n = (-4)^n$

Ahora, $a_{100} = b_{50} = \boxed{(-4)^{50}}$

Ej 6

a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$

La escribimos como ecuación homogénea

$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ (*)

Polinomio característico: $r^2 - 5r + 6$

Raíces: $\dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$\dfrac{5+1}{2} = 3$

$\dfrac{5-1}{2} = 2$

Entonces la solución general de (*) es

$$a_n = c \cdot 2^n + d \cdot 3^n \quad ; \ c, d \in \mathbb{R}$$

Hallamos c y d para que $a_0 = 1$ y $a_1 = 3$:

$$a_0 = c \cdot 2^0 + d \cdot 3^0 = 1 \Rightarrow c + d = 1 \rightarrow 2c + 2d = 2$$

$$a_1 = c \cdot 2^1 + d \cdot 3^1 = 3 \Rightarrow 2c + 3d = 3$$

quiero tachar c

$$(2c + 3d) - (2c + 2d) = 3 - 2$$

$$3d - 2d = 1$$

$$d = 1$$

$$c + 1 = 1$$

$$c = 0$$

Entonces la solución es

$$a_n = 0 \cdot 2^n + 1 \cdot 3^n = \boxed{3^n}$$

Ej 4 Sea $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

a) Probar que a_n verifica una recurrencia lineal con coeficientes constantes, de orden 2.

Mirando la fórmula, parece ser una solución de una recurrencia lineal de orden 2, que tiene polinomio característico con raíces $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

¿cómo hacemos un polinomio con estas raíces?

• Una forma Podemos tratar de ver la fórmula ahi

por ejemplo $a=1$, $b=-1$, $b^2-4ac=5$

$$-4ac=4$$
$$c=-1$$

$$ar^2+br+c = r^2-r-1$$

• otra forma : $\left(r-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(r-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ (cuentas un poco más "pesadas" pero es más metódico)

Llegamos a que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

son las raices del polinomio r^2-r-1,
que es el polinomio caracteristico
de la ecuación $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$

Entonces la sucesión $a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
verifica esta ecuación.

Si quieren lo pueden verificar sustituyendo.
(buen ejercicio de hacer cuentas)

b) Probar que a_n es entero positivo $\forall n\in\mathbb{N}$

Tenemos una recurrencia de orden 2,
entonces podemos hacer inducción fuerte
con 2 condiciones iniciales.

$P(n)$: a_n es entero positivo

casos base: $n=0$: $a_0=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0=1+1=2$ ✓

$n=1$: $a_1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1=\frac{1+\cancel{\sqrt{5}}}{2}+\frac{1-\cancel{\sqrt{5}}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ ✓

Paso inductivo:

HI: $P(i)\ \forall i \leq k$: a_i es entero positivo $\forall i \leq k$

TI: $P(k+1)$: a_{k+1} es entero positivo

La ecuación que verifica (a_n) es

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \qquad \forall n$$

Para que aparezcan $k+1$ y los menores o iguales a k puedo evaluar en $n = k-1$

$$a_{k+1} - a_k - a_{k-1} = 0$$

Despejo

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} \Rightarrow a_{k+1} \text{ es suma de enteros positivos}$$

son enteros positivos por <u>HI</u>

$\Downarrow$

a_{k+1} es entero positivo

Por el P.I.C.F., quedó probado que a_n es entero positivo $\forall n \in \mathbb{N}$