Práctico 6

Ej 1: Simplemente llegar a una relación de recurrencia

En general, estas ecuaciones las obtenemos razonando igual que cuando hacemos el PI en los ejercicios de Inducción

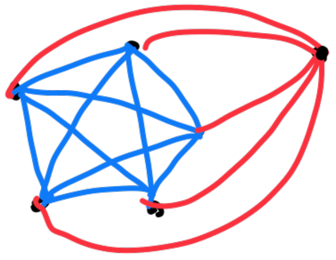
a) Cantidad de saludos en una reunión de n personas

Hagamos de cuenta que la n-ésima persona llegó después que todas las otras n-1 personas se saludaron

\# {saludos entre las primeras n personas}

= (1) # {saludos entre las primeras n-1 personas}

\+ (2) # {saludos de la n-ésima persona con todas las otras}



Ejemplo con $n = 6$

condición inicial

$a_1 = 0$ (1 persona, 0 saludos)

a todas las otras $(n-1)$

Volviendo a la ecuación original:

Esta es fácil

$a_n = a_{n-1} + n - 1$ ecuación que

$a_n = 3(3 \cdot 4^{n+2} - a_{n-1})$ bts sabemos $9 \cdot a_{n-1}$

Hasta acá es lo que pide el ejercicio. ¿Pero podemos resolverla?

* En combinatoria ya habíamos probado

$3a_{n-1} + 2a^{n+1}$

que $a_n = C^n_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ (cada conjunto de 2 personas se saluda 1 vez)

$= -a_{n-1} + 9 \cdot 4^{n-2}$

Nos queda la ecuación

* También podemos expresar esto como sumatoria: $a_n - a_{n-1} = n - 1$

$9 \cdot 4^{n-2}$

$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_{n-2} - a_{n-3}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1$

(lo que viene vamos a aprender a resolver estas ecuaciones

$= (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 + 0$

Se llaman ecuaciones en recurrencia lineales con coeficientes constantes, no homogéneas.

$= \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

* Luego vamos a poder resolver esta ecuación con un método general para ecuaciones en recurrencia

b) Cantidad de secuencias de 0s y 1s que no tienen dos 0s seguidos (00 ✗)

Muchas sumas vienen simplemente de la regla de la suma (separar en casos)

Me fijo en el primer dígito (o en el último dígito)

• | $\boxed{*}$ * * ----- * * * |

0 ó 1 — n dígitos

Separo en casos

• | 0 1 * * ----- * * | (n-2 dígitos)

↳ sí o sí un 1, porque 00 no está permitido en este ejercicio

• | 1 * * * ----- * * | (n-1 dígitos)

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

f) Cantidad de secuencias de 1s y 2s que suman n

- $\underbrace{\overset{1 \text{ ó } 2}{\boxed{*}}\ * \ * \cdots * \ *}$

  no sé cuántos son, pero sé que suman n

¿Podemos hacer como en el ejercicio anterior?

¡Sí!

- $\underbrace{1\ \overbrace{* \ * \cdots * \ *}^{\text{suman } n-1}}$

- $\underbrace{2\ \overbrace{* \ * \cdots * \ *}^{\text{suman } n-2}}$

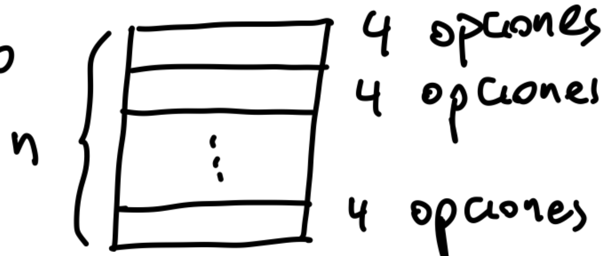
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

<u>obs</u> Muchas veces distintos problemas dan la misma ecuación (¿de casualidad?), tal vez con condiciones iniciales diferentes

Ej 3 ¿Cuántas banderas de n franjas con 4 colores podemos formar?

a) Sin restricciones

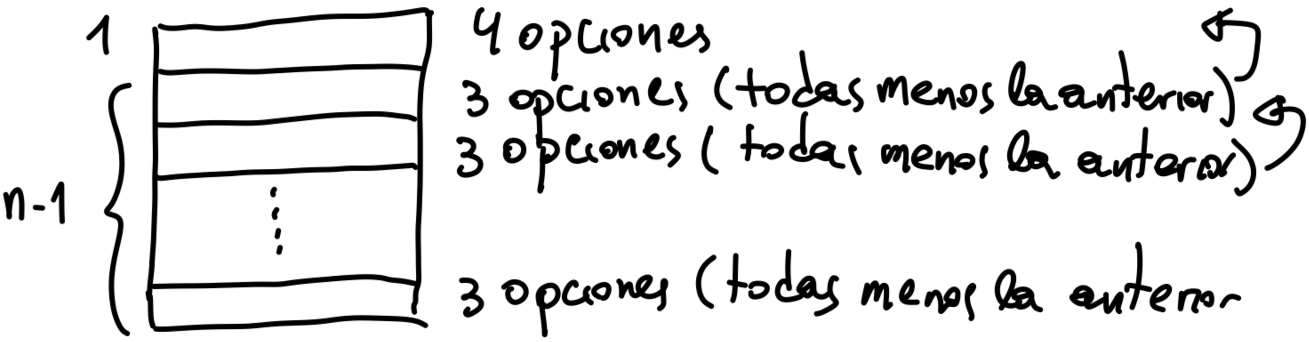
Regla del producto



$\underline{4^n}$ opciones

También lo podemos escribir $a_n = 4a_{n-1}$, $a_1 = 4$

b) Si dos franjas seguidas no pueden ser del mismo color

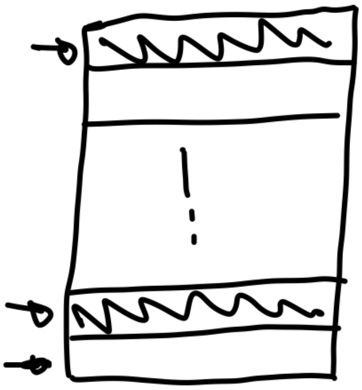


$4 \cdot 3^{n-1}$ También podemos escribirlo

$$a_n = 3a_{n-1} \quad , \quad a_1 = 4$$

c) No puede haber dos franjas seguidas iguales, y tampoco la primera y la última

$a_n = \#\{$banderas de n franjas sin dos seguidas iguales y sin la primera y la última iguales$\}$

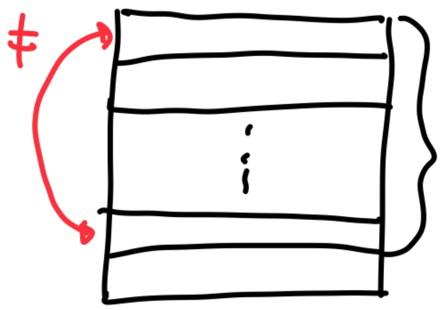


Para elegir el color de la n-ésima franja, tengo que mirar la anterior $(n-1)$ y la primera

Separemos en dos casos

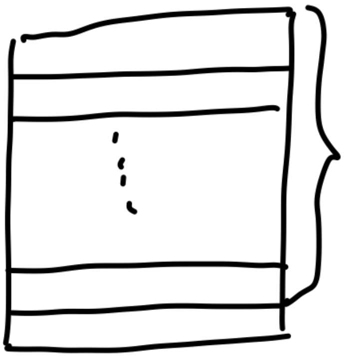
- Si la primera y la $(n-1)$-ésima son iguales, tengo 3 opciones para la n-ésima

- Si la primera y la $(n-1)$-ésima son diferentes, tengo 2 opciones para la n-ésima $\Rightarrow$ a_{n-1}

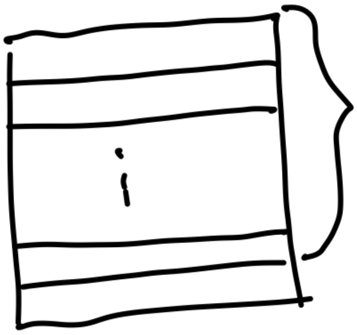


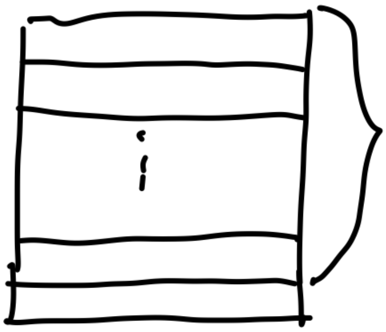
Este trozo de bandera está contado en a_{n-1}

El caso ● es un poquito menos simple

\#  todas estas banderas con $n-1$ franjas y sin franjas seguidas iguales

$= 4 \cdot 3^{n-2}$ (por la parte anterior)

$=$ \#  Banderas con $n-1$ franjas sin franjas seguidas iguales y con primera y $(n-1)$-ésima iguales ●

$+$ \#  Banderas con $n-1$ franjas sin franjas seguidas iguales y con primera y $(n-1)$ésima diferentes ● $= a_{n-1}$

Esta regla de la suma nos da que ● $= 4 \cdot 3^{n-2} - a_{n-1}$

En la clase del 05-15 lo resolvemos!

Juntando todo:

$$a_n = 2\, a_{n-1} + 3\left(4 \cdot 3^{n-2} - a_{n-1}\right)$$