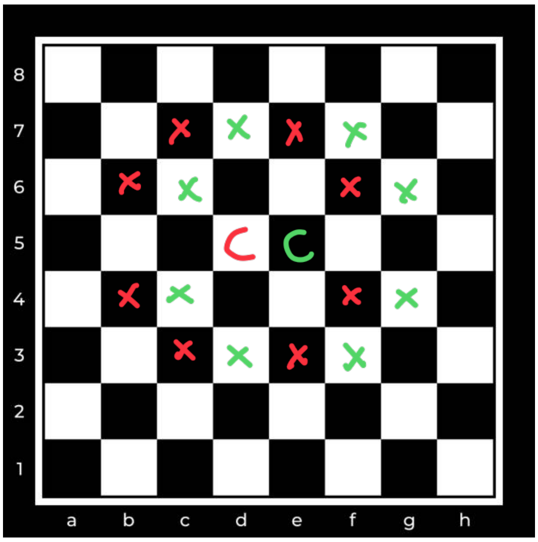
Pr 5, Ej 7

Hallar el número máximo de caballos de ajedrez que pueden ponerse en el tablero sin que ninguno pueda saltar hacia la posición del otro (esto se llama "amenazarse") (o "se pueden comer")

Movimientos del caballo



C = caballo

x = casillas a las que puede moverse

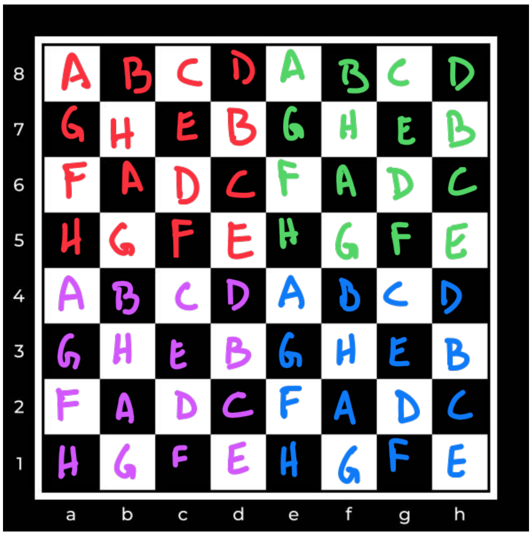
Si está en una casilla blanca, sólo se puede mover a casillas negras, y viceversa

Entonces, poniendo todos los caballos en casillas blancas, o todos en negras, ninguno puede comer a otro. Así podemos poner hasta 32 caballos.

Nos parece que con 33 ya no se puede. Una posible idea es usar el Principio del palomar, ¿cómo?

Palomas: caballos

Nidos: conjuntos de casillas
(casillas solas no, porque $64 > 33$)



En este tablero 4x4, conseguimos 8 conjuntos nidos de 2 casillas cada uno, donde cada par de casillas "se amenazan" entre sí

Ahora lo podemos resolver de dos formas:

1) "Copiamos" los nidos que hicimos en un cuadrado de 4x4, y los ponemos en cada uno de los otros 3 cuadrados 4x4. Quedan 32 nidos (Mismo nido = misma letra y mismo color) y cada nido tiene dos casillas que "se amenazan mutuamente".
Por el P.P., si hay 33 caballos, al menos dos van a caer en casillas distintas del mismo nido, esos dos se pueden comer entre sí.

2) Si dividimos el tablero en 4 tableros 4x4, $32 = 8 \cdot 4$

$33 > \underline{8} \cdot 4$, entonces

de los 33 caballos hay al menos $\underline{9}$ que van a estar en el mismo tablero 4x4.

En el tablero 4x4 ya tenemos la división en 8 nidos, entonces de esos 9 caballos va a haber 2 en el mismo nido. Esos caballos se pueden comer mutuamente

En este caso la solución 1) ya es muy buena, pero si no la encontrábamos, al menos la primera parte del 2) permite pasar de un problema más grande (33 caballos en 8x8) a uno similar pero más chico (9 caballos en 4x4)

Algunas estrategias para resolver ejercicios (teóricos y prácticos)

Inducción

- Plantear bien la proposición $P(n)$
- Paso base (en ind fuerte puede haber más de uno)
- Plantear bien el paso inductivo.

Escribir H.I., escribir T.I.

2 estrategias posibles

A) Partir de <u>una mitad de la TI</u> y llegar a <u>la otra mitad de la TI</u> usando HI en el camino.

Ej: al probar $TI = P(k+1): 1+2+\cdots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, parto de la mitad izquierda y sustituyo $HI = P(k): 1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

Así

mitad izquierda de TI

$$\overbrace{\underbrace{1+2+\cdots+k}_{\text{mitad izquierda de HI, que la puedo usar}}+(k+1)} = \underbrace{\frac{k(k+1)}{2}}_{\text{mitad derecha de HI}} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}_{\text{mitad derecha de TI}}$$

B) Partir de HI entera, y llegar a TI

HI: $1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

sumo $k+1$ a los dos lados

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)+2\cdot(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Al final, siempre queda bien concluir y resumir

En ind. fuerte
$\forall k\,(P(0),\ldots,P(k) \Rightarrow P(k+1))$

como $P(0)$ es cierta, y $\forall k\,(P(k) \Rightarrow P(k+1))$, entonces por el P.I.C $P(n)$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$

Combinatoria - Conteo

- observar qué es distinguible y qué es indistinguible

Recordar que muchas veces podemos pasar de distinguible a indistinguible dividiendo por permutaciones, y viceversa multiplicando

Palabras con BANANA

$A_1 A_2 A_3 N_1 B N_2 \to AAANBN$
$A_1 A_2 A_3 N_2 B N_1 \nearrow$

si son distinguibles
$6!$

si las A son indistinguibles y las N son indistinguibles

$$\frac{6!}{3!\,2!}$$

Esto es sólo un ejemplo, puede pasar en más situaciones

- Recurrir a situaciones conocidas
  - Palabras y letras
  - Pelotitas y cajas
  - ... etc

Al relacionar dos problemas distintos, verificar que lo distinguible y lo indistinguible es lo mismo en ambos casos.

- Al hacer reglas del producto, tener cuidado de estar contando bien y que la cantidad de casos sea igual

Principio de Inclusión-Exclusión

- Reconocer qué condiciones sabemos contar y cuales no, y ver si cambiando una condición por su opuesta ahí aparece algo que sabemos contar
- Fijarse si al contar condiciones, el resultado depende de qué condiciones son, o no.
  - Si depende, sumo por separado
  - Si no depende, puedo multiplicar por el número de combinaciones

Principio del Palomar

- Palomas: por lo general es más fácil (cosas a elegir o distribuir) (números, caballos, puntos...)
- Palomares: Puede ser algo más abstracto (conjuntos de casillas, o de números, ...)

Debemos asegurarnos que al encontrar dos palomas distintas en el mismo nido, se cumple la condición que queremos

- Si no me estoy dando cuenta, o si quiero corroborar, probar con varios casos para ir viendo si se cumple lo que queremos, y dónde se cumple.

En general

No enroscarse. Si me tranco, respiro y lo vuelvo a mirar.