Pr 4

Ej 6 a) ¿Cuántas permutaciones de 123456789 cumplen que ningún dígito está en su posición original?

Ejemplos: 234567891 si   214398675 si

214398765 no   183251946 no

está en la posición 7

Lo que nos pide calcular es exactamente la definición de desórdenes (desarreglos) en un conjunto de tamaño 9. Lo calculamos con el P.I.E. en el conjunto de todas las permutaciones, con las condiciones C_i: la permutación deja i en su posición original.

\# sumandos

$$d_9 = N(\bar{C}_1 \bar{C}_2 \bar{C}_3 \dots \bar{C}_9)$$

$$= \overset{1}{N} - \overset{9}{\left[N(C_1) + N(C_2) + \dots + N(C_9)\right]}$$

$$+ \overset{C^9_2}{\left[N(C_1 C_2) + N(C_1 C_3) + \dots + N(C_8 C_9)\right]}$$

$$- \left[N(C_1 C_2 C_3) + N(C_1 C_2 C_4) + \dots + N(C_7 C_8 C_9)\right] \quad C^9_3$$

$$+ \left[N(C_1 C_2 \dots C_8) + N(C_1 C_2 \dots C_7 C_9) + \dots + N(C_2 C_3 \dots C_9)\right] \quad C^9_8$$

$$- N(C_1 C_2 \dots C_9) \quad C^9_9 = 1$$

Si lo pensamos como en los arreglos, con cantidad de posibilidades.

1 $\longrightarrow$ 8 lugares posibles (todos menos el 1°)

2 $\longrightarrow$ 8 lugares posibles (todos menos el 2°) pero además el lugar tiene que ser distinto del lugar donde puse el 1

- si al 1 justo lo puse en el 2º lugar, tengo 8 opciones
- si al 1 lo puse en otro lugar, tengo 7 opciones

Acá no podemos aplicar la regla del producto salvo que separemos en casos, y son muchos muchos casos

Cuando tengo ℓ condiciones $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_\ell}$, fijo ℓ elementos y permuto todos los $n-\ell$ que me quedan

Ejemplo: $N(c_1 c_2 c_3) = \#\{$permutaciones que dejan fijos $1,2,3\}$

$$1\,2\,3\,\underbrace{\cdots\cdots}_{4\,\cdots\,9}$$

$= \#\{$permutaciones de $\underbrace{\{4,5,6,7,8,9\}}_{6 \text{ elementos}}\} = 6!$

Entonces $N = 9!$

$$N(c_1) = N(c_2) = \dots = N(c_9) = 8!$$

$$N(c_1 c_2) = N(c_1 c_3) = \dots = N(c_i c_j) = 7!$$

$$N(c_1 c_2 c_3) = \dots = N(c_i c_j c_k) = 6!$$

$$\vdots$$

$$N(c_1 c_2 \cdots c_\ell) = \dots = N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_\ell}) = (n-\ell)!$$

$$\vdots$$

volviendo a la fórmula

$$d_9 = C_0^9\, 9! - C_1^9\, 8! + C_2^9\, 7! - C_3^9\, 6! + C_4^9\, 5! - C_5^9\, 4! + C_6^9\, 3! - C_7^9\, 2! + C_8^9\, 1! - C_9^9\, 0!$$

cada término es $(-1)^\ell C_\ell^n (n-\ell)! = (-1)^\ell \dfrac{n!}{\ell!\cancel{(n-\ell)!}} \cancel{(n-\ell)!}$

$$C^n_\ell (n-\ell)! = \frac{n!}{\ell!}$$

En total lo que tenemos es

$$\frac{9!}{0!} - \frac{9!}{1!} + \frac{9!}{2!} - \frac{9!}{3!} + \frac{9!}{4!} - \frac{9!}{5!} + \frac{9!}{6!} - \frac{9!}{7!} + \frac{9!}{8!} - \frac{9!}{9!}$$

$$362880 - 362880 + 181440 - 60480 + 15120 - 3024 + 504 - 72 + 9 - 1 = 133496$$

Acá fuimos deduciendo la fórmula de desarreglos. Si alguien ya se la sabía, está bien.

$$d_9 = \sum_{\ell=0}^{9} (-1)^\ell \frac{9!}{\ell!}$$

b) Ahora sólo los dígitos pares no están en su posición original, sobre los impares no hay restricción

Es la misma forma de resolverlo que la parte a), usando P.I.E, pero sólo con las condiciones c_2, c_4, c_6, c_8

$$N(\overline{c}_2\,\overline{c}_4\,\overline{c}_6\,\overline{c}_8) = \underbrace{N}_{1=C^4_0} - \underbrace{\left[N(c_2)+N(c_4)+N(c_6)+N(c_8)\right]}_{4=C^4_1}$$

$$+ \underbrace{\left[N(c_2c_4)+N(c_2c_6)+N(c_2c_8)+N(c_4c_6)+N(c_4c_8)+N(c_6c_8)\right]}_{6=C^4_2}$$

\# términos

$$- \underbrace{\left[N(c_2c_4c_6)+N(c_2c_4c_8)+N(c_2c_6c_8)+N(c_4c_6c_8)\right]}_{4=C^4_3}$$

$$+ \underbrace{N(c_2c_4c_6c_8)}_{1=C^4_4}$$

$$= 1\cdot 9! - 4\cdot 8! + 6\cdot 7! - 4\cdot 6! + 1\cdot 5!$$

$$= 229080$$

c) A Los pares no están en su posición original y B los primeros 4 son 1,2,3 ó 4

Entonces, los últimos 5 son 5,6,7,8 ó 9

<u>Ejemplos</u>

1234 56789	cumple B no cumple A
1432 58967	cumple B cumple A
234567891	cumple A no cumple B

Esto se puede hacer en dos pasos para después hacer la regla del producto

1) Permuto 1, 2, 3, 4 entre si

2) Permuto 5,6,7,8,9 entre si

Ahora son permutaciones de 4

1) $N(\bar{C_2}\,\bar{C_4}) = N - [N(C_2) + N(C_4)] + N(C_2 C_4)$

$= 4! - 2 \cdot 3! + 2! = 14$

Ahora son permutaciones de 5

2) $N(\bar{C_6}\,\bar{C_8}) = N - [N(C_6) + N(C_8)] + N(C_6 C_8)$

$= 5! - 2 \cdot 4! + 3! = 78$

Aplicando la regla del producto, la cantidad de estas permutaciones es $14 \cdot 78 = 1092$