

Práctico 4

Ej 1a) ¿ cuántos números entre 1 y 105
no son múltiplos de 3, 5 ni 7? 11
 $3 \cdot 5 \cdot 7$

Es más fácil saber cuántos hay
que sí sean múltiplos.

Ejemplo: Uno de cada 3 números
es múltiplo de 3.

1 no, 2 no, 3 sí, 4 no, 5 no, 6 sí, ...

... 103 no, 104 no, 105 sí

Hay $\frac{105}{3}$ múltiplos de 3 entre 1 y 105.

Podemos resolver el problema usando el
P.I.E. en el conjunto de todos los números
enteros entre 1 y 105, con las
condiciones

$C_1(x)$: x es múltiplo de 3

$C_2(x)$: x es múltiplo de 5

$C_3(x)$: x es múltiplo de 7

En este caso $N(c_i c_j)$ depende de cuáles son i y j , los contamos por separado

$$N(\overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3}) = N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3)] + [N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + N(c_2 c_3)] - N(c_1 c_2 c_3)$$

Como en el ejemplo con c_1 :

$$N(c_1) = \frac{105}{3} = 5 \cdot 7 = 35$$

$$N(c_2) = \frac{105}{5} = 3 \cdot 7 = 21$$

$$N(c_3) = \frac{105}{7} = 3 \cdot 5 = 15$$

¿Qué pasa con las condiciones de a dos y de a tres? (3, 5 y 7 son todos Primos entre sí)

$c_1 c_2(x)$: x es múltiplo de 3 y de 5
 $\Rightarrow x$ es múltiplo de $3 \cdot 5 = 15$

$C_1 C_3(x)$: x es múltiplo de 3 y de 7

$\Leftrightarrow x$ es múltiplo de $3 \cdot 7 = 21$

$C_2 C_3(x)$: x es múltiplo de 5 y de 7

$\Leftrightarrow x$ es múltiplo de $5 \cdot 7 = 35$

$C_1 C_2 C_3(x)$: x es múltiplo de 3, de 5 y de 7

$\Leftrightarrow x$ es múltiplo de $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

Ahora calculamos los términos que quedan

$$N(C_1 C_2) = \frac{105}{3 \cdot 5} = 7$$

$$N(C_2 C_3) = \frac{105}{5 \cdot 7} = 3$$

$$N(C_1 C_3) = \frac{105}{3 \cdot 7} = 5$$

$$N(C_1 C_2 C_3) = \frac{105}{105} = 1$$

 Aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned} N(\overline{C_1} \overline{C_2} \overline{C_3}) &= 105 - [35 + 21 + 15] \\ &\quad + [7 + 5 + 3] - 1 \\ &= 48 \end{aligned}$$

5) Podemos hacer el P.I.E. pero en el conjunto de los múltiplos de 3 entre 1 y 1155 = $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

$$\# \{ \text{múltiplos de 3, pero no de 5, 7 y 11} \}$$

$$= \# \{ \text{múltiplos de 3} \}$$

$$- \left[\# \{ \text{múltiplos de 3 y de 5} \} \right.$$

$$+ \# \{ \text{múltiplos de 3 y de 7} \}$$

$$+ \# \{ \text{múltiplos de 3 y de 11} \} \left. \right]$$

$$+ \left[\# \{ \text{múltiplos de 3, 5 y 7} \} \right.$$

$$+ \# \{ \text{múltiplos de 3, 5 y 11} \}$$

$$+ \# \{ \text{múltiplos de 3, 7 y 11} \} \left. \right]$$

$$- \# \{ \text{múltiplos de 3, 5, 7 y 11} \}$$

$$= \frac{1155}{3} - \left[\frac{1155}{3 \cdot 5} + \frac{1155}{3 \cdot 7} + \frac{1155}{3 \cdot 11} \right]$$

$$+ \left[\frac{1155}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1155}{3 \cdot 5 \cdot 11} + \frac{1155}{3 \cdot 7 \cdot 11} \right] - \frac{1155}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$$

$$= 385 - 77 - 55 - 35 + 11 + 7 + 5 - 1 = 240$$

Otra forma de escribir esto es igualmente escribir todo con condiciones.

$C_1(x)$: x es múltiplo de 3

$C_2(x)$: x " " " 5

$C_3(x)$: x " " " 7

$C_4(x)$: x " " " 11

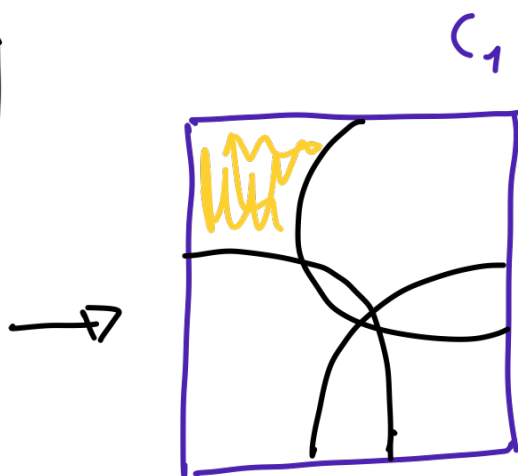
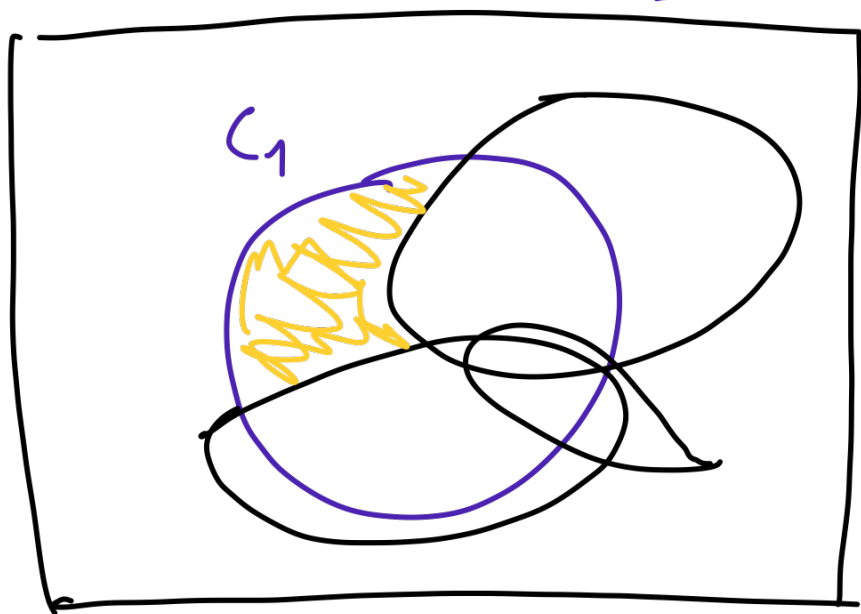
Que vamos a calcular

$$N(\underline{C_1} \overline{C_2} \overline{C_3} \overline{C_4}) = N(\underline{C_1})$$

$$- [N(\underline{C_1} C_2) + N(\underline{C_1} C_3) + N(\underline{C_1} C_4)]$$

$$+ [N(\underline{C_1} C_2 C_3) + N(\underline{C_1} C_2 C_4) + N(\underline{C_1} C_3 C_4)]$$

$$- N(\underline{C_1} C_2 C_3 C_4)$$



(En el plano es difícil dibujar 4 conjuntos)

Ej 2

6 tiradas de un dado de 6 caras
(distinguibiles)
; De cuántas formas podemos obtener
un múltiplo de 18?

x_i = valor de la i -ésima tirada del dado

$$1 \leq x_i \leq 6, x_i \in \mathbb{Z}$$

$$6 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 36$$

Podemos separar y usar regla de
la suma: el resultado es múltiplo de 18
si es 18 ó 36

Para el resultado 36 hay una única
posibilidad, $6+6+6+6+6+6$, la sumamos
al final

Ahora tenemos que contar las soluciones
de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 18, x_i \in \mathbb{Z}$

$$1 \leq x_i \leq 6 \quad (*)$$

Las condiciones $1 \leq x_i$ las resolvemos definiendo nuevas variables $x'_i = x_i - 1$

Entonces

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 + x'_6 = 18 - 6 = 12$$
$$\left(= (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) + (x_5 - 1) + (x_6 - 1) \right)$$

Las condiciones son $x'_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq x'_i \leq 5$ 

$$1 - 1 \leq x_i - 1 \leq 6 - 1$$

Esta resta es porque $x'_i \geq 0$ lo sabemos resolver usando combinaciones con repetición.

Vamos a aplicar el P.I.E en el conjunto de soluciones de

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 + x'_6 = 12, x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0$$

$$\text{Sabemos que } N = C_{12}^{\overline{6}} = C_{6-1}^{12+6-1} = C_5^{17} = \frac{17!}{5!12!} = 6188$$

Tenemos 6 condiciones:

$$C_1: x'_1 > 5 (\Leftrightarrow x'_1 \geq 6)$$

$$C_2: x'_2 > 5 (\Leftrightarrow x'_2 \geq 6)$$

$$C_3: x'_3 > 5 (\Leftrightarrow x'_3 \geq 6)$$

$$C_4: x'_4 > 5 (\Leftrightarrow x'_4 \geq 6)$$

$$C_5: x'_5 > 5 (\Leftrightarrow x'_5 \geq 6)$$

$$C_6: x'_6 > 5 (\Leftrightarrow x'_6 \geq 6)$$

Queremos calcular

$$N(\overline{C_1} \overline{C_2} \overline{C_3} \overline{C_4} \overline{C_5} \overline{C_6}) = N - [N(C_1) + N(C_2) + \dots + N(C_6)]$$

todas las formas de
juntar 2
condiciones
distintas

$$+ [N(C_1 C_2) + N(C_1 C_3) + \dots + N(C_1 C_6) + N(C_2 C_3) + \dots + N(C_2 C_6) + \dots + N(C_5 C_6)]$$

$$- [N(C_1 C_2 C_3) + \dots + N(C_4 C_5 C_6)] + [N(C_1 C_2 C_3 C_4) + \dots + N(C_3 C_4 C_5 C_6)]$$

$$- [N(C_1 C_2 C_3 C_4 C_5) + \dots + N(C_2 C_3 C_4 C_5 C_6)] + N(C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6)$$

Como todas las variables tienen la misma restricción $x'_i \geq 6$,

$$N(C_1) = N(C_2) = \dots = N(C_6) = \underbrace{C R_{12-6}^6}_{\text{restarle 6 a } x'_i} = C R_6^6$$

$$N(C_i) = C R_6^6$$

$$x''_i = x'_i - 6$$

$$\text{Entonces } [N(C_1) + N(C_2) + \dots + N(C_6)] = 6 \cdot \overbrace{C R_6^6}^{\text{cantidad de sumandos}}$$

$$= 6 \cdot C_{6-1}^{6+6-1} = 6 \cdot C_5^{11} = 6 \cdot 462$$

De la misma forma,

$N(C_i C_j)$ no depende de i y j

son dos variables $x'_i \geq 6$ y $x'_j \geq 6$.

$$N(C_i C_j) = \underbrace{C R_{12-6-6}^6}_{\dots} = C R_0^6 = C_{6-1}^{0+6-1} = 1$$

$$[N(C_1 C_2) + N(C_1 C_3) + \dots + N(C_5 C_6)] = \underline{C_2^6} \cdot 1$$

Hay tantos términos como subconjuntos de 2 elementos $\{i, j\}$

De a 3, 4, 5 o 6 condiciones, no
hay soluciones:

$$\text{Si } x'_i \geq 6, x'_j \geq 6, x'_k \geq 6$$

$$\Rightarrow x'_i + x'_j + x'_k \geq 18 \Rightarrow \text{el resultado total} \\ \text{nunca va a ser 12}$$

La fórmula da

$$\begin{aligned} N(\bar{C}_1 \bar{C}_2 \bar{C}_3 \bar{C}_4 \bar{C}_5 \bar{C}_6) &= 6188 - 6 \cdot 462 + C_2^6 \cdot 1 \\ &\quad - C_3^6 \cdot 0 + C_4^6 \cdot 0 - C_5^6 \cdot 0 + C_6^6 \cdot 0 \\ &= 3431 \text{ formas de sumar} \\ &\quad 18 \text{ con 6 tiradas de dado} \end{aligned}$$

$$+ 1 \text{ forma de sumar } 36 = 3432 \text{ formas de} \\ \text{sumar un múltiplo de 18}$$