Pr 3 Ej 7

Contar las soluciones de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \quad : \quad \begin{array}{l} x_i \in \mathbb{Z} \\ x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_4 \geq 3 \end{array}$$

sabemos resolverlo cuando todas las variables tienen que ser ≥ 0

Entonces podemos definir variables nuevas y cambiarlas

$x_1' = x_1 - 3 \geq 0$, $x_4' = x_4 - 3 \geq 0$

Ahora las hacemos aparecer en la ecuación

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ Resto 3 dos veces

$(x_1 - 3) + x_2 + x_3 + (x_4 - 3) = 15 - 3 - 3 = 9$

$x_1' + x_2 + x_3 + x_4' = 9$ todas las variables son enteras y son ≥ 0

La cantidad de soluciones es

$$CR_9^4 = C_{4-1}^{9+4-1} = C_3^{12} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

Ej 10

3 estudiantes, 8 bizcochos de chocolate

7 bizcochos de crema

cada estudiante lleva al menos uno de cada tipo.

Ideas

- "Al menos uno" es que la cantidad que lleva cada estudiante es ≥ 1
- Son dos problemas "independientes": por cada forma de distribuir los de chocolate tenemos todas las formas de distribuir los de crema

$\Rightarrow$ Usamos regla del producto

x_1, x_2, x_3 son la cantidad de bizcochos de chocolate que lleva cada estudiante.

Tenemos que contar la cantidad de soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 = 8$

$x_i \in \mathbb{Z}$

$x_1, x_2, x_3 \geq 1$

Definimos variables nuevas

$x_1' = x_1 - 1$, $x_2' = x_2 - 1$, $x_3' = x_3 - 1$

Entonces tenemos que contar las soluciones de $x_1' + x_2' + x_3' = 8 - 1 - 1 - 1 = 5$

Esto tiene significado: es darle 1 bizcocho a cada estudiante y repartir sin restricciones los 5 que quedan

La cantidad de soluciones es

$$CR_5^3 = C_{3-1}^{5+3-1} = C_2^7 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

formas de repartir los de chocolate.

Vamos con los de crema:

contamos soluciones de

$$y_1 + y_2 + y_3 = 7 \qquad \begin{array}{l} y_i \in \mathbb{Z} \\ y_1, y_2, y_3 \geq 1 \end{array}$$

Defino $y_1' = y_1 - 1$, $y_2' = y_2 - 1$, $y_3' = y_3 - 1$

La ecuación queda

$$y_1' + y_2' + y_3' = 7 - 1 - 1 - 1 = 4 \qquad \begin{array}{l} y_i' \in \mathbb{Z} \\ y_i' \geq 0 \end{array}$$

La cantidad de soluciones es

$$CR_4^3 = C_{3-1}^{4+3-1} = C_2^6 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

formas de distribuir los de crema.

Ahora aplicamos la regla del producto y tenemos $21 \cdot 15 = 315$ formas.

11 c Hallar el coeficiente de x^6 en $(2+2x+2x^2+2x^3+2x^4+x^5)^5$

Esto lo haciamos fijándonos a mano todas las formas de escribir x^6 como producto de distintos términos de cada uno de los 5 paréntesis multiplicados, y para cada forma hacer el coeficiente multinomial (arreglos con repetición)

Acá se puede hacer, pero son muchas, así que pensemos otra forma

Esto es lo mismo que

$$\left(2\left(1+x+x^2+x^3+x^4+\frac{1}{2}x^5\right)\right)^5$$

$$= 32\underbrace{\left(1+x+x^2+x^3+x^4+\frac{1}{2}x^5\right)^5}$$

podemos calcular el coeficiente de x^6 acá, y multiplicarlo por 32

Tenemos que contar los términos del desarrollo de este producto que dan x^6 por un número.

Ejemplos $1\cdot x\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}x^5$, $1\cdot x\cdot\frac{1}{2}x^5\cdot 1\cdot 1$

$1\cdot x\cdot x^2\cdot x^2\cdot x$, $x^3\cdot x\cdot 1\cdot x^2\cdot 1$, ...

Separamos los términos en

A) los que tienen $\frac{1}{2}x^5$ una vez

B) los que no tienen $\frac{1}{2}x^5$

(más no hay porque me paso de x^6)

Vamos a resolver A) y B), y usar la regla de la suma

A) Primero elijo dónde va $\frac{1}{2}x^5$,

tengo 5 opciones

Después sólo puedo elegir una x

(el resto van a ser 1)

tengo 4 opciones

Ejemplos

$\frac{1}{2}x^5 \cdot x \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$x \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}x^5 \cdot 1 \cdot 1$

$1 \cdot 1 \cdot x \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}x^5$

$A_2^5 = 20$ términos

cada uno lleva $\frac{1}{2}$

En total estos términos aportan $20 \cdot \frac{1}{2}x^5 \cdot x = 10x^6$

Ahora el caso B)

Tengo para elegir $1, x, x^2, x^3, x^4$ en 5 paréntesis distinguibles, y en total tienen que ser 6

Cada x es un bizcocho

Cada estudiante es un paréntesis

Tenemos que contar las formas de repartir 6 bizcochos entre 5 estudiantes, dándoles a c/u a lo sumo 4 bizcochos

Estamos resolviendo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \qquad x_i \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq x_i \leq 4$$

$$x^{x_1} \cdot x^{x_2} \cdot x^{x_3} \cdot x^{x_4} \cdot x^{x_5} = x^6$$

No sabemos cómo resolverlo con $x_i \leq 4$

Pero si sabemos resolverlo con la condición contraria: $x_i > 4$, o sea $x_i \geq 5$

Podemos usar el Principio de Inclusión-Exclusión

$C_1: x_1 \geq 5$, $C_2: x_2 \geq 5$, $C_3: x_3 \geq 5$,

$C_4: x_4 \geq 5$, $C_5: x_5 \geq 5$

$$N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}\,\overline{C_4}\,\overline{C_5}) =$$

$\overset{N}{\text{Total}} - \left[\overset{N_1}{\text{suma de las que cumplen cada condición}}\right]$

$+ \left[\overset{N_2}{\text{suma de las que cumplen cada conjunto de 2 condiciones}}\right]$

$- \left[\overset{N_3}{\text{"}} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 3 \quad \text{"}\right]$

$+ \left[\overset{N_4}{\text{"}} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 4 \quad \text{"}\right]$

$- \left[\overset{N_5}{\text{"}} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 5 \quad \text{"}\right]$

(t) Total: soluciones de $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6$

sin condiciones $\Rightarrow$ sin restricciones $\quad x_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \geq 0$

Hay $CR^{5}_{6} = CR^{6+5-1}_{5-1} = C^{10}_{4} = \dfrac{10!}{4!\,6!}$

(1) Con una condición, en este caso todas son iguales:

C_1: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6 \quad x_i \in \mathbb{Z}$, $x_1 \geq 5$, las otras $x_i \geq 0$

C_2: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6 \quad x_i \in \mathbb{Z}$, $x_2 \geq 5$, las otras $x_i \geq 0$

C_3
C_4
C_5

tienen todas la misma cantidad de soluciones

$CR^{5}_{6-5} = CR^{5}_{1} = C^{1+5-1}_{5-1} = C^{5}_{4} = C^{5}_{1} = 5$

ya repartí 5, reparto lo que falta

todas iguales a 5

Entonces $N_1 = N(C_1)+N(C_2)+N(C_3)+N(C_4)+N(C_5)$

$= 5 \cdot 5 = 25$

⑧ Si se cumplen dos de ellas a la vez

Por ejemplo $C_1 C_2$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \qquad \underbrace{\begin{matrix} x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 5 \end{matrix}}_{\text{me paso de } 6} \qquad \begin{matrix} \text{las otras} \\ x_i \geq 0 \end{matrix}$$

Entonces la cantidad de soluciones es 0

Entonces $N_2 = 0$

⑧ De la misma forma, $N_3 = 0$, $N_4 = 0$, $N_5 = 0$

Entonces la suma del caso B) queda

$$N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}\,\overline{C_4}\,\overline{C_5}) = \frac{10!}{4!\,6!} - 25 + 0 - 0 + 0 - 0 = 185$$

B) va a aportar $185\,x^6$

El coeficiente de x^6 es

$$32\,(\underset{A)}{10} + \underset{B)}{185}) = 32 \cdot 195 = \underline{6240}$$