$\boxed{\text{Pr 3}}$ Ej 5

$A = \{1, \dots, m\}$, $B = \{1, \dots, n\}$

a) ¿Cuántas funciones hay de A en B?

Si no hay restricciones, para cada elemento de A puedo elegir cualquiera de los de B como su imagen.

Por la regla del producto hay

$$\left.\begin{array}{ll} f(1) & n \text{ opciones} \\ f(2) & n \text{ opciones} \\ \vdots & \\ f(m) & n \text{ opciones} \end{array}\right\} \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ veces}} = n^m$$

b) ¿Cuántas funciones inyectivas hay de A en B?

f es inyectiva cuando cada imagen tiene una sola preimagen (podría también no estar en la imagen)

De otra forma, elementos distintos en A tienen imágenes distintas en B.

Elegir una función inyectiva de $A=\{1,..,m\}$ en $B=\{1,..,n\}$ es lo mismo que elegir m elementos distinguibles de B, que sean todos distintos.

Para empezar, si $\underline{m>n}$ no hay ninguna función inyectiva de A en B.
(Es imposible no repetir)

si $\underline{m \leq n}$, hay A_m^n funciones inyectivas de A en B

c) Las biyectivas son un caso particular de las inyectivas, son las que son inyectivas y además <u>sobreyectivas</u>.
(todos los elementos de B están en la imagen)
si $\underline{m<n}$, no hay funciones sobreyectivas de A en B.

$f(1)$ n opciones

$f(2)$ $n-1$ opciones (tiene que ser distinto de $f(1)$)

$f(3)$ $n-2$ opciones (tiene que ser distinto de $f(1)$ y de $f(2)$)

$f(4)$ $n-3$ opciones (tiene que ser distinto de $f(1)$, de $f(2)$ y de $f(3)$)

$\vdots$

$f(n)$ 1 opción (tiene que ser distinto de los otros $n-1$ valores de f que ya elegimos)

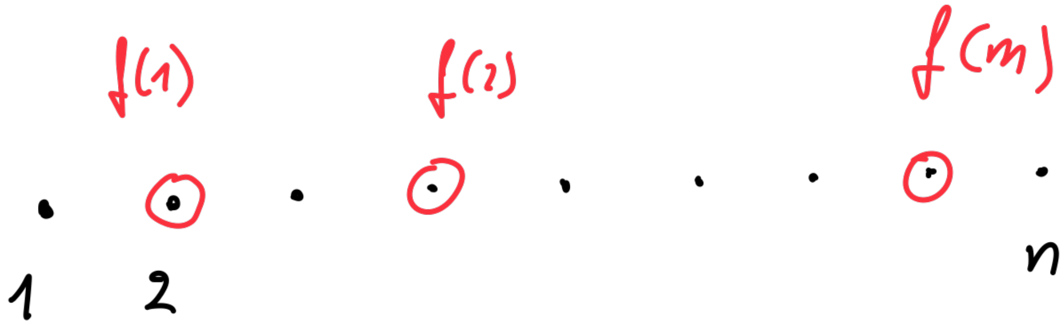
Por la regla del producto, hay

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ funciones biyectivas de A en B

i) La función es monótona estrictamente creciente:

si $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

¿Qué podemos hacer para elegir una función estrictamente creciente de A en B?



Las funciones monótonas estrictamente crecientes son todas inyectivas.

Para empezar, si $m>n$ no hay ninguna función inyectiva $\Rightarrow$ no hay ninguna función estrictamente creciente.

Si $m \leq n$, Podemos pensarlo de dos formas

1) Por cada $m!$ funciones inyectivas de A en B, hay sólo una que es estrictamente creciente (la que tiene $f(1)<f(2)<f(3)<\dots<f(m)$)

Entonces

$$\#\{f:A\to B \text{ estrictamente crecientes}\} = \frac{\#\{f:A\to B \text{ inyectivas}\}}{m!} = \frac{A^n_m}{m!}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

2) Una función estrictamente creciente queda determinada por cuál es el conjunto imagen (ya sabemos contar subconjuntos)

sólo puede ser $f(1)$

sólo puede ser $f(2)$

sólo puede ser $f(m)$

Entonces hay C^n_m funciones estrictamente crecientes:

$$\#\{f:A\to B \text{ estrictamente crecientes}\}$$

$$= \#\{\text{subconjuntos de } B \text{ de tamaño } m\}$$

$$= C^n_m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Ej 6: a) Una ficha de dominó tiene 2 números entre 0 y 6 (7 números distintos)

 = 

Entonces esos dos números entre 0 y 6 son <u>indistinguibles</u>

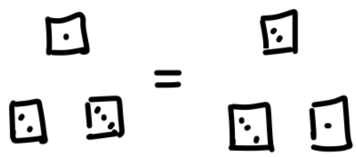
¿Puedo repetir? sí : 

Entonces la cantidad de fichas de dominó distintas es $CR_2^7 = C_{7-1}^{2+7-1} = C_2^{2+7-1}$

$$C_2^8 = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$$

b) Los dados tienen 6 caras distintas

Si tengo 3 dados idénticos, tengo 3 números indistinguibles



¿Puedo repetir? Si

En total hay $CR_3^6 = C_{6-1}^{3+6-1} = C_3^{3+6-1} = C_3^8 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} = 56$

elijo el más fácil

Ej 7:

a) ¿Cuántas soluciones hay de esta ecuación?

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=4 \qquad x_i\in\mathbb{Z},\ x_i\geq 0$$

Hay $CR^7_4 = C^{4+7-1}_{7-1} = C^{4+7-1}_{4} = C^{10}_{4} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2}$

$= 210$

b) Soluciones de

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7<4 \qquad x_i\in\mathbb{Z},\ x_i\geq 0$$

1) Usando regla de la suma:

La suma puede ser 0, 1, 2, 3

Entonces puedo contar las soluciones de $x_1+\dots+x_7=0$, $=1$, $=2$, $=3$ y sumar todas las cantidades

Esto es $CR^7_0+CR^7_1+CR^7_2+CR^7_3$

$$= C^{0+7-1}_{0} + C^{1+7-1}_{1} + C^{2+7-1}_{2} + C^{3+7-1}_{3}$$

$$= C^{6}_{0} + C^{7}_{1} + C^{8}_{2} + C^{9}_{3} = 1+7+\frac{8\cdot7}{2}+\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2}$$

$$= 1+7+28+84 = 120$$

2) Podemos hacerlo con una igualdad, guardando en otra variable lo que nos faltó:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 < 4$$

en $\mathbb{Z}$ es lo mismo que ≤ 3

Defino $y = 3 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$

Por cómo lo definimos, $y \in \mathbb{Z}$ y $y \geq 0$

y además

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + y = 3$$

Son 8 números enteros no negativos que sumados dan 3

La cantidad de soluciones es

$$CR_3^8 = C_{8-1}^{3+8-1} = C_3^{3+8-1} = C_3^{10} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$