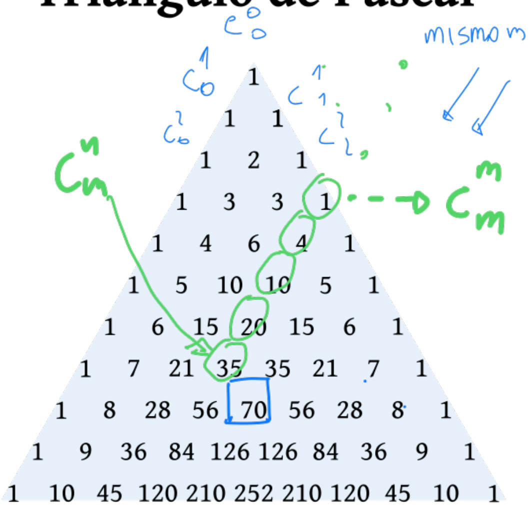
Pr 2 Ej 13

Triángulo de Pascal



Queremos encontrar una fórmula para

$$\sum_{i=0}^{n} C_m^i = \sum_{i=m}^{n} C_m^i$$

Va a depender de m y n

m = En qué diagonal estoy sumando

n = Hasta dónde estoy sumando

Fijemos $m = 3$
$n = 7$

$$70 = C_4^8 = C_{m+1}^{n+1}$$

Esto lo estamos haciendo para adivinar la fórmula (conjeturar, intuir)

Ahora hay que demostrarla:

$$\sum_{i=0}^{n} C_m^i = C_{m+1}^{n+1}$$

Si lo queremos hacer por inducción completa, ¿en qué variable podríamos hacer la inducción?

Probemos con n

$$\sum_{i=0}^{n+1} C_m^i = \underbrace{C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^n}_{} + C_m^{n+1}$$

HI

$$= C_{m+1}^{n+1} + C_m^{n+1} \underset{\text{Stiefel}}{=} C_{m+1}^{n+2}$$

El que está aumentando en 1 es $\underline{\underline{n}}$ (m no)

Ahora lo escribimos prolijo:

Sea $P(n)$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_m^i = C_{m+1}^{n+1}$

Si $n < m$, ambos lados de la igualdad son 0 (el de arriba siempre es menor)

Vamos a probar por el P.I.C. que $\forall n \geq m$ $P(n)$ es cierta

<u>PB:</u> $n = m$: $\displaystyle P(m) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i = C_{m+1}^{m+1}$

Lado izquierdo

$$\sum_{i=0}^{m} C_m^i = \underbrace{\underset{0}{C_m^0} + \underset{0}{C_m^1} + \dots + \underset{0}{C_m^{m-1}}}_{\text{ceros}} + \underset{\underline{1}}{C_m^m} = 1$$

Lado derecho

$$C_{m+1}^{m+1} = \underline{1}$$

Se puede justificar

- porque hay un único subconjunto de m elementos en un conjunto de m elementos

o
- porque $C_m^m = \dfrac{m!}{m!\,0!} = 1$

(y lo mismo con $m+1$)

PI

HI: $P(k)$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} C_m^i = C_{m+1}^{k+1}$

TI: $P(k+1)$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} C_m^i = C_{m+1}^{k+2}$

Partimos del lado izquierdo de la TI

$$\sum_{i=0}^{k+1} C_m^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} C_m^i}_{\text{Lado izquierdo de la HI}} + C_m^{k+1} = C_{m+1}^{k+1} + C_m^{k+1}$$

$$\| $$

$$C_{m+1}^{k+2}$$

Por la fórmula de Stiefel

Llegamos a que el lado izquierdo y el derecho de la TI son iguales ✓

Por el P.I.C, $P(n)$ vale $\forall m \geqslant n$ $\square$

P. 2 Ej 14

Probar que $$\sum_{i=0}^{n} \left(C_i^n\right)^2 = C_n^{2n}$$

usando que $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$

Fórmula del binomio

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n x^i$$

$$(1+x)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} C_i^{2n} x^i$$

$$\|$$

$$\left((1+x)^n\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} C_i^n x^i\right)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(C_i^n x^i\right)^2 + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{n} 2 C_i^n x^i \cdot C_j^n x^j$$

Estamos buscando una igualdad de polinomios que podamos igualar coeficiente a coeficiente

En general, C^m_k es el coeficiente de x^k en $(1+x)^m$

Tomo $m=2n$
$k=n$

Entonces C^{2n}_n es el coeficiente de x^n en $(1+x)^{2n}$

Usando la igualdad, $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$

¿Cuál es el coeficiente de x^n en $(1+x)^n(1+x)^n$?

$$(1+x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{i=0}^{n} C^n_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} C^n_j x^j\right)$$

$$= \left(C^n_0 + C^n_1 x + C^n_2 x^2 + \dots + C^n_n x^n\right)\cdot$$

$$\left(C^n_0 + C^n_1 x + C^n_2 x^2 + \dots + C^n_n x^n\right)$$

¿Qué productos de un término del paréntesis izquierdo por uno del derecho dan algo con x^n? (un número por x^n)

$i=0$ y $j=n$, $i=1$ y $j=n-1$, $i=2$ y $j=n-2$, ..., $i=n$ y $j=0$

Vamos a visualizarlo en $n=3$

$$(1+x)^6 = 1+6x+15x^2+\underline{20}x^3+15x^4+6x^5+x^6$$

por otro lado,

$$(1+x)^3(1+x)^3 = (1+3x+3x^2+x^3)(1+3x+3x^2+x^3)$$

$$\begin{aligned} = {} & 1+3x+3x^2+x^3 \\ & +3x+9x^2+9x^3+3x^4 \\ & +3x^2+9x^3+9x^4+3x^5 \\ & +x^3+3x^4+3x^5+x^6 \end{aligned}$$

El coeficiente de $x^3 = 1+9+9+1 = 20$

Por un lado, verificamos la igualdad

por otro lado, $1+9+9+1 = 1^2+3^2+3^2+1^2$

(el lado izquierdo de la fórmula)

El coeficiente de x^n en $(1+x)^n(1+x)^n =$

$$\left(C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_{n-2}^n x^{n-2} + C_{n-1}^n x^{n-1} + C_n^n x^n\right) \cdot \left(C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_{n-2}^n x^{n-2} + C_{n-1}^n x^{n-1} + C_n^n x^n\right)$$ es

$$C^n_0 \cdot C^n_n + C^n_1 C^n_{n-1} + C^n_2 C^n_{n-2} + \ldots\ldots + C^n_n \cdot C^n_0$$

Esto es $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} C^n_i \underbrace{C^n_{n-i}}_{= C^n_i} = \sum_{i=0}^{n} \left(C^n_i\right)^2$ ✓