Pr 2 Ej 5 ¿cuántos números pares entre 100 y 1000 tienen los 3 dígitos distintos?

Llamemos a, b, c a los dígitos

El número es $N = abc$.

N es par $\rightarrow$ $c = 0, 2, 4, 6$ o 8

$100 < N < 1000 \Rightarrow a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ o 9

Sobre b solo, no hay restricciones

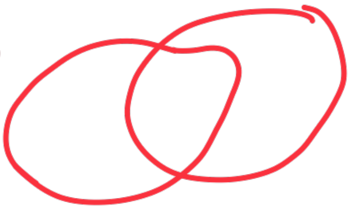
$b = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ o 9

Tienen que ser los tres distintos.

Empiezo por los que tienen restricciones

Como $a \neq c$ y los dos tienen restricciones, tengo que elegir primero uno de ellos, y de ahí ver cómo mi elección afectó la restricción del otro

$a \neq 0$



c par

Vamos a elegir a, después c, y después b

a puede ser par o impar, y según eso va a afectar la restricción al elegir c

Divido en dos casos y después aplico la regla de la suma

	# posibilidades
1) Si a es impar, es 1, 3, 5, 7 o 9	5
c es par y $\underbrace{c \neq a}_{\text{ya se cumple porque a es impar}} \Rightarrow$ c es 0, 2, 4, 6 u 8	5
b sólo tiene que ser distinto de a y c: 10 − 2	8

En total hay $5 \cdot 5 \cdot 8 = 200$ posibilidades en el caso 1)

posibilidades

2) Si a es par, como $a \neq 0$, puede ser 2, 4, 6 o 8 — 4

c es par y $\underbrace{c \neq a}_{\text{ahora importa}}$: $5-1$ — 4

b sólo tiene que ser distinto de a y c : $10-2$ — 8

En total hay $4 \cdot 4 \cdot 8 = 128$ posibilidades en el caso 2)

Por la regla de la suma:

Total = Total 1) + Total 2) = $200 + 128 = 328$

De otra forma, eligiendo c primero

1) $c = 0$, 2) $c \neq 0$

		# posibilidades
1)	c	1
	$a \neq 0$	$10-1 = 9$
ya está	$\underline{a \neq c}$	
	$b \neq a$	$10-2 = 8$
	$b \neq c$	

Total 1) = $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$

2) $c \neq 0$ $\quad 5-1 = 4$ $\quad$ Total 2)

c par $\quad\quad 4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$

$a \neq 0$ $\quad 10-2 = 8$

$a \neq c$

$b \neq a$ $\quad 10-2 = 8$

$b \neq c$

Por la regla de la suma,

$$\text{Total} = \text{Total } 1) + \text{Total } 2) = 72 + 256 = 328$$ ✓

Ej 12 a) ¿cuántos subconjuntos diferentes tiene un conjunto de n elementos?

observemos qué pasa con los primeros valores de n

$n = 1$, $A = \{1\}$, $S \subseteq A$ tiene al 1 o no

$S = \{1\}$ o $S = \emptyset$

$$\#\{S \text{ subconjunto de } A\} = 2$$

$\underline{n=2}$ $A=\{1,2\}$

¿Cómo contamos los subconjuntos de $\{1,2\}$?

		# subconjuntos
0 elementos	$\emptyset$	1
1 elemento	$\{1\}$ y $\{2\}$	2
2 elementos	$\{1,2\}$	1

Total: $1+2+1=4$

$\underline{n=3}$ $A=\{1,2,3\}$

		# subconjuntos
0 elementos	$\emptyset$	1
1 elemento	$\{1\},\{2\}$ y $\{3\}$	3
2 elementos	$\{1,2\},\{1,3\}$ y $\{2,3\}$	3
3 elementos	$\{1,2,3\}$	1

Total: $1+3+3+1=8$

¿Tenemos alguna intuición de qué número es?

$\frac{n=1}{2}$ $\frac{n=2}{4}$ $\frac{n=3}{8}$ | Podría ser 2^n ¿será?

Seguimos el mismo procedimiento para cualquier n
Separamos los subconjuntos según su cantidad de elementos y después regla de la suma

# de elementos de S	# de posibilidades para elegir S
0	1 ($S = \emptyset$)
1	n (uno por cada elemento)
⋮	
k	C_k^n
⋮	
n	

Para un k fijo, los posibles S son por definición C_k^n

Por la regla de la suma,

$$\#\{S \subseteq A\} = \#\{S \subseteq A : \#S = 0\} + \#\{S \subseteq A : \#S = 1\} + \dots + \{S \subseteq A : \#S = k\} + \dots + \#\{S \subseteq A : \#S = n\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k^n$$

Recordemos la fórmula del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C^n_k \, x^{n-k} y^k$$

Si evalúo en $x=1$ e $y=1$:

$$\sum_{k=0}^{n} C^n_k = \sum_{k=0}^{n} C^n_k \, 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n \quad ✓$$

el que quiero calcular

---

b Probar que $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C^n_j = 0$

Para algunos n

$n=1$ $1-1=0$

$n=2$ $1-2+1=0$

$n=3$ $1-3+3-1=0$

$n=4$ $1-4+6-4+1=0$

¿Podemos hacer aparecer el binomio de Newton acá?

$$\sum_{k=0}^{n} C^n_k (-1)^k$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_j^n = \sum_{j=0}^{n} C_j^n (-1)^j \cdot 1^{n-j}$$

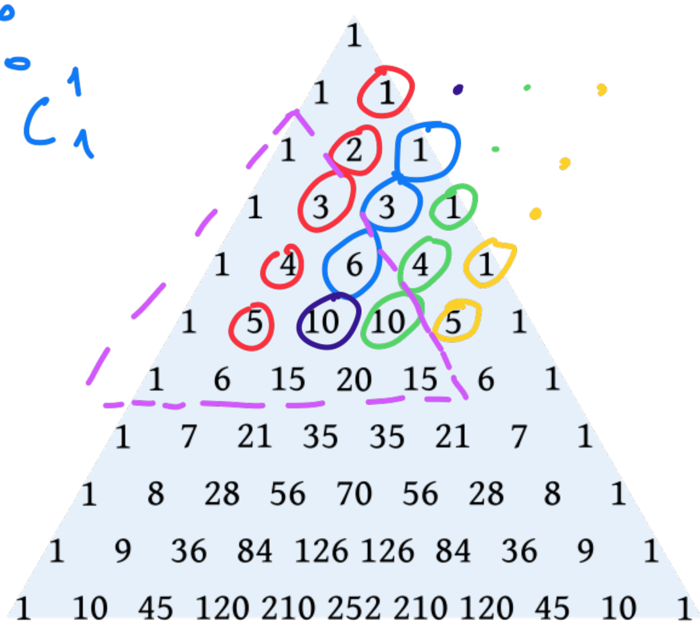
Es el binomio de Newton evaluado en $x=1, y=-1$

$$= (1+(-1))^n = 0^n = 0 \quad \checkmark$$

Triángulo de Pascal

C_0^0

$C_0^1 \quad C_1^1$



Ej 13

$$\sum_{i=0}^{n} C_m^i = \sum_{i=m}^{n} C_m^i$$

$m=2$
$n=3$

$$\sum_{i=2}^{3} C_2^i = C_2^2 + C_2^3 = 4$$

$m=2$
$n=4$

$$\sum_{i=2}^{4} C_2^i = C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 = 10$$

m \ n	1	2	3	4	5
1	1	3	6	10	15
2	0	1	4	10	20
3	0	0	1	5	15
4	0	0	0	1	6
5	0	0	0	0	1

1
1 3
1 4 6
1 5 10 10
1 6 15 20 15

continuará...

La solución bien escrita y prolija la vamos a hacer la clase que viene