Ej 10: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ es una sucesión definida así

$a_1 = 3$, $a_2 = 10$, $a_3 = 30$

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \quad \forall n \geq 1$$

Queremos probar que para todo $n \geq 1$

$a_n \geq 3^n$

Para ir entrando en el problema, vemos cómo funcionan las sucesiones definidas por recurrencia

$n=1$: $a_4 = 2a_3 + 7a_2 + a_1$ (ya están definidos)

$= 2 \cdot 30 + 7 \cdot 10 + 3$

$= 60 + 70 + 3 = 133$

$n=2$: $a_5 = 2a_4 + 7a_3 + a_2$

$= 2 \cdot 133 + 7 \cdot 30 + 10$

$= 266 + 210 + 10 = 486$

n	a_n	3^n	¿$a_n \geq 3^n$?
1	3	3	✓
2	10	9	✓
3	30	27	✓
4	133	81	✓
5	486	243	✓

Vamos a probarlo por P.I.C.F.

$P(n)$: $a_n \geq 3^n$

PB : $P(1)$: $a_1 \geq 3^1$

Es cierto porque $a_1 = 3 = 3^1$

PI : Si $P(i)$ es verdadera $\forall i : 1 \leq i \leq k$, entonces $P(k+1)$ es verdadera TI

HI

Dicho de otra forma: $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ son todas verdaderas

Dem. del PI: (hay gente que los pone en el paso base)

si $k+1 = 1, 2$ o 3, ya lo sabemos

$a_1 = 3 \geq 3^1$, $a_2 = 10 \geq 3^2$, $a_3 = 30 \geq 3^3$

Si $k+1 \geq 4$, podemos usar la relación de recurrencia

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \quad \forall n$$

$$a_{k+1} = 2\underset{\substack{\vee| \\ 3^k}}{a_k} + 7\underset{\substack{\vee| \\ 3^{k-1}}}{a_{k-1}} + \underset{\substack{\vee| \\ 3^{k-2}}}{a_{k-2}}$$

Aplicamos HI

$k, k-1, k-2 \leq k+1$

Otra forma puede ser $3^{k+1}(2\cdot 3^{-1} + 7\cdot 3^{-2} + 3^{-3})$

$$a_{k+1} \geq 2\cdot 3^k + 7\cdot 3^{k-1} + 3^{k-2}$$

(cuentas) $= 3^{k-2}(2\cdot 3^2 + 7\cdot 3 + 1)$

$$= 3^{k-2}(18 + 21 + 1)$$

$$= 3^{k-2}\cdot 40$$

Acabamos de probar que el lado izquierdo de la TI es

$a_{k+1} \geq 3^{k-2}\cdot 40$

cuentas de potencias

El lado derecho es $3^{k+1} = 3^{k-2}\cdot 3^3 = 3^{k-2}\cdot 27$

Juntando: $\underbrace{a_{k+1}}_{\text{TI}} \geq 3^{k-2}\cdot 40 > 3^{k-2}\cdot 27 = \underbrace{3^{k+1}}$ ✓

Ej 11: Probar que todo $n \geq 2$ se escribe como producto de números primos, por P.I.C.F.

$P(n)$: n se escribe como producto de primos.

De otra forma: $\exists$ primos $p_1, \dots, p_m : n = p_1 \cdots p_m$

Cualquier número es primo o es divisible entre alguno de los anteriores

n		$P(n)$
2	primo	✓
3	primo	✓
* 4	$4 = \underbrace{2}_{\text{primo}} \cdot \underbrace{2}_{\text{primo}}$	✓
5	primo	✓
6	$6 = \underbrace{2}_{\text{primo}} \cdot \underbrace{3}_{\text{primo}}$	✓
7	primo	✓
8	$8 = \underbrace{2}_{\text{primo}} \cdot \underbrace{4^{*}}_{\text{producto de primos}}$	✓

PB: 2 es primo, es el producto de un solo primo, que es 2

$P(2)$ es verdadera

PI: HI: $\forall i: 2 \leq i \leq k$, i se escribe como producto de primos

$P(i)$ es cierta:

TI: $P(k+1)$: $k+1$ se escribe como producto de primos

Demostración del PI:

Hay dos casos

→ Si $k+1$ es primo, es como el paso base, $k+1 = k+1$ (producto de un solo primo)

→ Si $k+1$ no es primo, quiere decir que se escribe como producto de dos números menores

$k+1 = i \cdot j \quad 2 \leq i, j \leq k$

(la HI me permite usar $P(i)$ y $P(j)$)

Por HI: i es producto de primos
j es producto de primos

entonces $k+1 = i \cdot j$ también (es el producto de los primos que forman i por los primos que forman j)

Conclusión:

como $P(2)$ es cierta,
y para todo $k \geq 2$
vale que
si $\left(\forall i : 2 \leq i \leq k \ \underset{\text{verdadera}}{P(i)}\right) \Rightarrow P(k+1)$,
Por el Principio de Inducción Fuerte,
$P(n)$ es cierta $\forall n \geq 2$