Inducción

Tenemos una proposición $P(n)$ que depende de una variable n : ⊙ natural $\{\underline{0}, 1, 2, \ldots\}$

⊙ entera, a partir de cierto número

Caso base $\{\underline{4}, 5, 6, \ldots\}$

$\{\underline{-3}, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$

Ejemplo : $P(n)$: Hay exactamente 2^n listas binarias distintas de largo n.

¿qué es una lista binaria? Es una palabra en dos letras (números, caracteres, ...)

por ejemplo 0 y 1

00   11001

01   10

000   001

1

Pensemos en $P(4)$

¿Cuántas listas binarias de largo 4 hay?

podemos listarlas ordenadamente

(estrategia de conteo) si no, nos podemos perder alguna

si 4 es muy grande,

empiezo por ordenar algo más chico

Por ejemplo largo $n=2$

1er dígito 0 : $0\underline{0}$, $0\underline{1}$ hay $4=2^2$

1 : $1\underline{0}$, $1\underline{1}$

2º dígito

0 1

Para $n = 4$

dígito:	1^{er}	2^{o}	3^{er}	4^{o}
	0	0	0	0
	1	1	1	1

son independientes

Por cada dígito, tengo la misma cantidad de palabras que empiezan con él

Ahí es donde entra la inducción:

n	Palabras de largo n		
1	2	0 , 1	$\times 2$
2	4	00 01 10 11	$\times 2$
3	8	000 001 010 011 100 101 110 111	

Estamos relacionando $P(n)$ con $P(n-1)$

o $P(n+1)$ con $P(n)$

$P(1)$ = Hay 2^1 listas de largo 1

$\Downarrow$

$P(2)$ = Hay 2^2 listas de largo 2

$\Downarrow$

$P(3)$ = Hay 2^3 listas de largo 3

$\Downarrow$

Paso Inductivo

$P(4)$ Pudimos ver que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$\Downarrow$

$\vdots$ y por otra parte $P(1)$ es verdadera

Paso Base

caso Base

PB: $P(1)$ V

PI: $\Downarrow$

$P(2)$ V

PI: $\Downarrow$

$P(3)$ V

PI: $\Downarrow$

$P(4)$ V

$\Downarrow$

$\vdots$

$P(n)$ va a ser verdadera

$\forall n \in \mathbb{N}$

(para todos los $n \in \mathbb{N}$)

Principio de Inducción Completa (P.I.C)

$P(n)$ proposición que depende de n.

PB: $P(n_0)$ es verdadera para un cierto n_0

PI: $\forall k \in \mathbb{Z}, k \geq n_0$, es verdadero que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$\Downarrow$

$P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$

Para probar algo por P.I.C.

tenemos que:

- P) Escribir bien cuál es $P(n)$
- PB) Probar PB (chequear algo)
- PI) Probar PI (hacer una demostración)

y concluir: ya está

A partir de acá, la solución del ejercicio (como en un parcial) es ~~todo~~ lo que está en blanco

Ejemplo P $P(n)$: Hay exactamente 2^n listas binarias de largo n

Vamos a probar por P.I.C. que $P(n)$ es cierta $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$

Si quieren, $n=0$ es la lista vacía

PB: $P(1)$: Hay exactamente 2 listas binarias de largo 1

$P(1)$ es verdadera: las listas son 0 y 1 ✓

PI: Tenemos que probar $\underbrace{P(k)}_{\substack{\text{Hipótesis}\\ \text{Inductiva}\\ \text{HI}}} \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{\substack{\text{Tesis}\\ \text{Inductiva}\\ \text{TI}}}$

$$HI \xrightarrow{PI} TI$$

HI: $P(k)$: Hay exactamente 2^k listas binarias de largo k

TI: $P(k+1)$: Hay exactamente 2^{k+1} listas binarias de largo $k+1$

Demostración del PI

Es un razonamiento para deducir TI, donde podemos usar HI como verdadera en cualquier momento

Los argumentos del PI tienen que ver con el tema sobre el que habla $P(n)$

Por cada lista binaria de largo k, $\llcorner L \lrcorner$ hay dos listas binarias distintas de largo $k+1$: $0\llcorner L \lrcorner$ y $1\llcorner L \lrcorner$

Entonces

$\# \{$listas binarias de largo $k+1\} =$

$= \# \{$listas binarias de largo $k\} \cdot 2$

$= 2^k \cdot 2$

HI $= 2^{k+1}$, quedó probada TI usando HI ✓

Como $P(1)$ es verdadera, y $\forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 1,$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$, entonces, por el P.I.C,

$P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ $\blacksquare$