Relaciones entre conjuntos

Utilidades

Generalizar el concepto de función, cuando puede "haber más de una imagen" o "no haber imagen".

Ej

1) Conjuntos $A = \{\text{Participantes de la clase de hoy}\}$

$B = \mathbb{N}$

Hay una función $f : A \to B$ (f de A en B)

$f(X) =$ La edad de X hoy

Algunos valores de f

$f(\text{Luca}) = 19$ $f(\text{Matías}) = 18$ $f(\text{Beatriz}) = 30$

$f(\text{Diego}) = 24$ $f(\text{Victoria}) = 19$ $f(\text{Facundo}) = 19$

2) $A = \{$Participantes de la clase de hoy$\}$

$B = \{$sabores de helado$\}$

Me gustaría definir $f(X) =$ sabor de helado favorito de X

Hay personas que tienen un solo sabor favorito de helado

$f($Alexander$) =$ Kinoto

$f($Facundo$) =$ chocolate

$f($Tommy$) =$ vainilla

$f($Alfonso$) =$ chocolate

Pero hay gente a la que no le gusta ningún sabor de helado

$f($Ignasio$) = ???$

y hay gente que tiene más de un sabor favorito

$f(\text{Manuel}) =$ ¿capuchino o dulce de leche?

$f(\text{Alexandre}) =$ ¿dulce de leche o mantecol?

$f(\text{Beatriz}) =$ ¿dulce de leche o tramontana?

$f(\text{Matías}) =$ ¿pistacho o chocolate?

$f(\text{Javier}) =$ ¿pistacho o sambayón o tramontana?

y bueno, inventamos algo que no sea una función pero que sea parecido y permita tener varios valores o ninguno. Eso va a ser una <u>relación</u>

Simplemente tengo que listar los pares (x, s) de personas x y sabores s, tales que x tiene a s entre sus sabores favoritos

Def: Si A y B son conjuntos, una relación de A en B es un conjunto de pares ordenados donde la primera coordenada está en A y la segunda coordenada está en B

Es decir, una relación de A en B es un subconjunto de $A \times B$

(el producto cartesiano de A con B)

obs: Una función es un caso especial de relación

Ej: 1) $f = \{$ (Luca, 19), (Die, 24), (Mat, 18), (Vic, 19), (Bea, 30), (Facu, 19), ... $\}$

2) $f = \{$ (Alex, Kinoto), (Facu, choco), (Tommy, vainilla), (Alfonso, choco), (Manu, capu), (Manu, ddl), (Alexa, ddl), (Alexa, mantecol), (Bea, ddl), (Bea, tramontana), ... $\}$

¿Y qué hacemos con Ignasio?

No hay problema, simplemente en f no hay ningún par que tenga a Ignasio en la primera coordenada

En general usamos símbolos que no son letras (ya veremos), o letras mayúsculas como $R, S, \dots$

Entonces en este ejemplo decimos

$$R = \{ (\text{Alex}, \text{kinoto}), (\text{Facu}, \text{choco}), \dots \}$$

$$R = \{ (x, s) \in A \times B : x \text{ tiene a } s \text{ entre sus sabores favoritos} \}$$

También escribimos $x R s$

R está en el lugar de un verbo

"x prefiere s"

Más ejemplos

3) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $R =$ "ser divisor de..."

$a R b \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a$ es divisor de b

muchas veces se escribe $a | b$,

podemos decir $R = |$

Podemos escribir $(2,4) \in R$, o $2R4$

4) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

$x R y \Leftrightarrow x = y^2$

5) $A = \{$funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}\}$

$B = \mathbb{R}$

$f R x \Leftrightarrow f(x) = 0$

"$f = 0$ tiene solución x"

si $f(x) = x^2 - 1$, $f R 1$ y $f R (-1)$

si $g(x) = x^4 + 1$, no hay x tal que $g R x$

Formas de representar relaciones

(A) Como conjuntos (son subconjuntos de un producto cartesiano)

Como hicimos recién

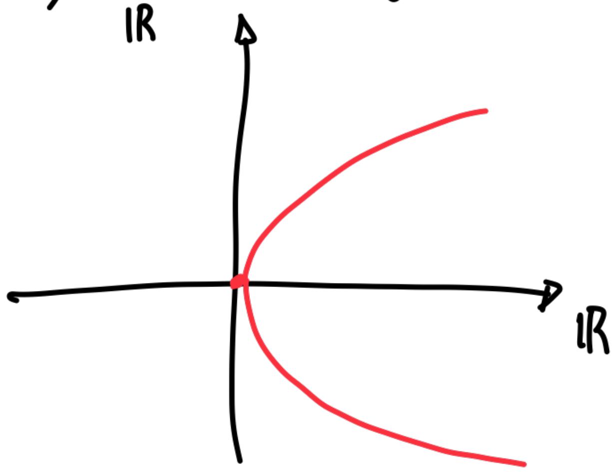
2) por comprensión

$R = \{ (x, s) : s \text{ es favorito de } x \}$

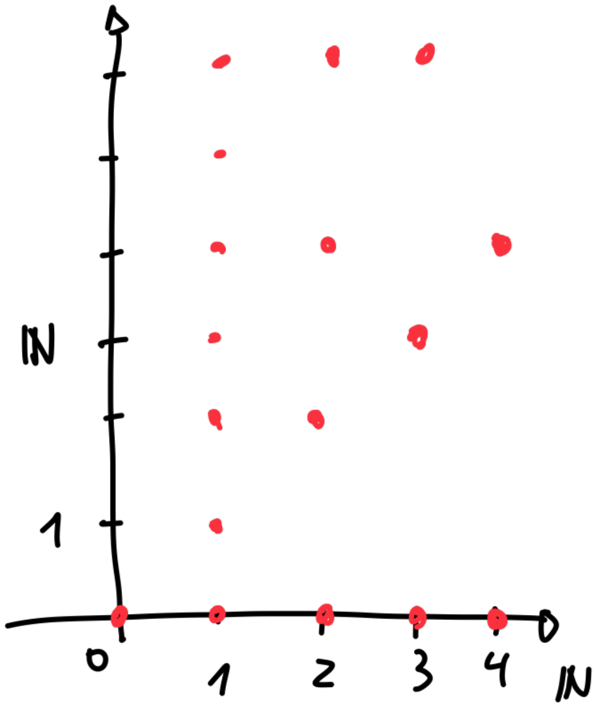
$R = \{ (\text{Manu}, \text{capu}), (\text{Manu}, \text{ddl}), (\text{Alexa}, \text{ddl}), \ldots \}$

(B) Aprovechando que son una generalización de las funciones, las podemos representar gráficamente

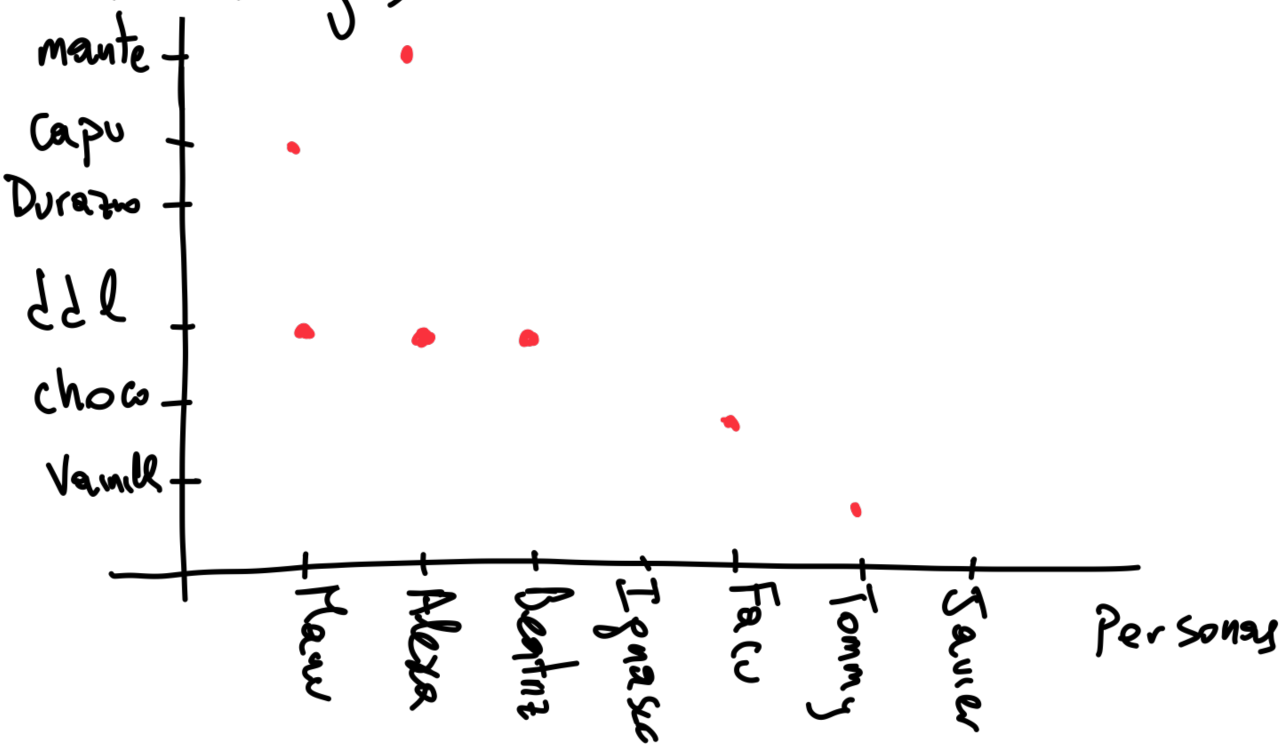
4) $x \underset{\mathbb{R}}{R} y \Leftrightarrow x = y^2$



3) $a R b \iff a$ es divisor de b



2) Podemos colocar a las personas y a los sabores "artificalmente" en los ejes



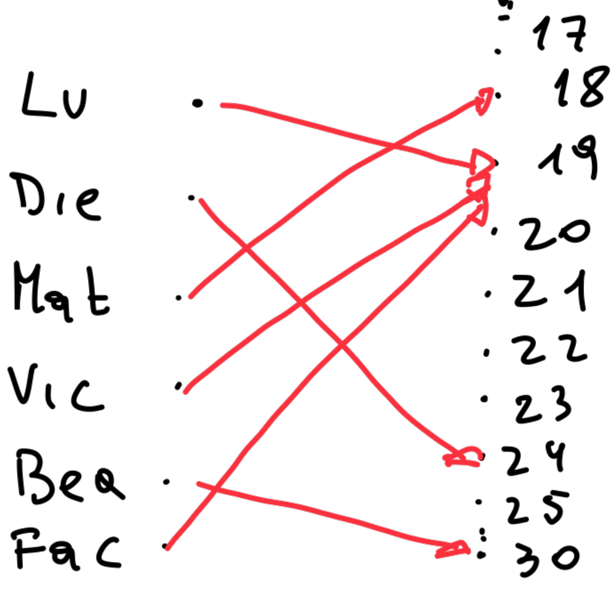
En este último, la gráfica no es tan útil. Para eso, mejor una tabla.

(C) o lo que es lo mismo, una matriz binaria (matriz de ceros y unos)

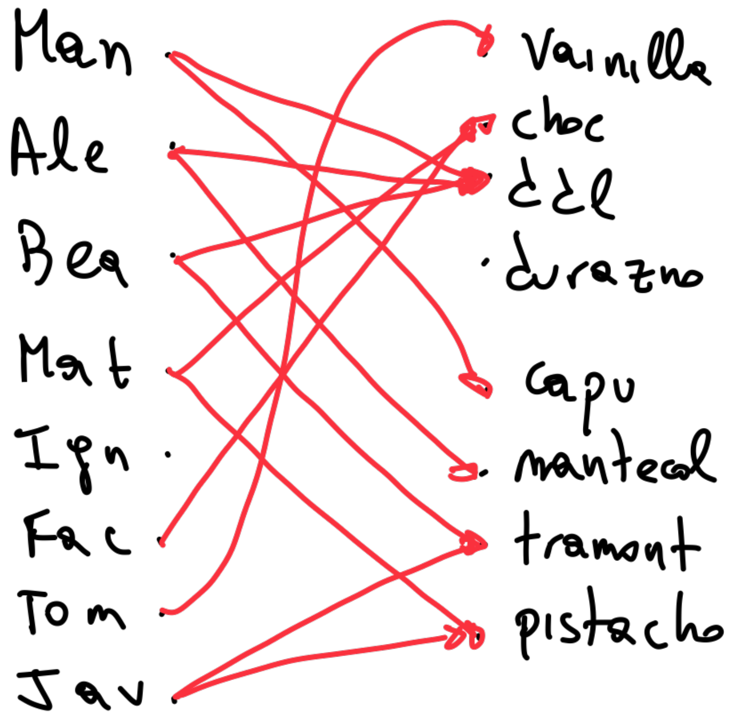
$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & \text{Vain.} & \text{choco.} & \text{ddl} & \text{durazno} & \text{capu} & \text{mante} & \text{tram} & \text{pistacho} \\
\hline
\text{Manu} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\text{Alexa} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\text{Bea} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\text{Igni} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\text{Facu} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\text{Tom} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\text{Javi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

(D) Como hacíamos con las funciones, podemos dibujar flechas

1)

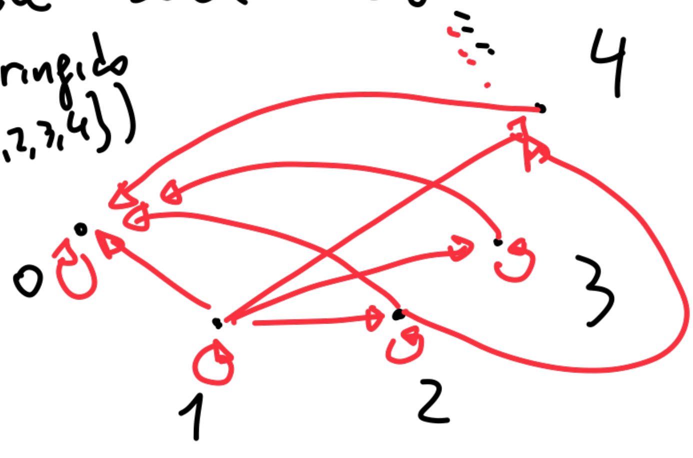


2)



Si $A = B$, puedo dibujar los puntos una sola vez

3) (restringido a $\{0,1,2,3,4\}$)



Este conjunto de puntos y flechas se llama digrafo o grafo dirigido

(no es como los grafos que vamos a ver al final del curso)