Recurrencias lineales de coeficientes constantes <u>no</u> homogéneas

Orden 1

Hasta ahora veniamos viendo ecuaciones de la forma

$$A a_n + B a_{n-1} = 0$$

Se llaman homogéneas

y aprendimos a resolverlas todas

¿Qué pasa si en vez de 0 tenemos otra cosa?

Ej que ya vimos

Cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión

Argumento: Si tengo n personas que ya se saludaron entre todas, cuando llega la persona n+1 saluda a las n restantes, entonces se agregan n saludos

$$a_{n+1} = a_n + n$$

$$\underbrace{a_{n+1} - a_n}_{\text{parecido a lo que sabemos resolver}} = n \longrightarrow \text{distinto}$$

¿por qué es distinto?

Antes usábamos que la suma de soluciones es solución

(porque $0+0=0$)

Ahora esto no nos sirve, pero....

Tomemos la ecuación

$$(*) \quad A a_{n+1} + B a_n = f_n$$ con f_n conocida

Sean (a_n) y (b_n) soluciones de $(*)$

$$\begin{array}{rl} & A a_{n+1} + B a_n = f_n \\ - & A b_{n+1} + B b_n = f_n \\ \hline & A(a_{n+1} - b_{n+1}) + B(a_n - b_n) = 0 \end{array}$$

¡Una de las que sabemos resolver!

Sea $h_n = a_n - b_n \quad \forall n$

Lo que tenemos es que

$$A h_{n+1} + B h_n = 0$$ Vamos a llamarla (H)

(H) es la ecuación homogeneizada de $(*)$
(la misma pero cambio el lado derecho por 0)

No sabemos todavía si podemos encontrar soluciones de (*) pero si tenemos a una entonces las tenemos a todas:

Si encuentro una a_n^*,
después para cualquier otra solución a_n defino $h_n = (a_n^* - a_n)$,
encuentro todas las h_n (soluciones de (H))
y $a_n = a_n^* + h_n$

Vamos al ejemplo

$$a_{n+1} - a_n = n$$

<u>Paso 1</u> Resuelvo la recurrencia homogénea

$$h_{n+1} - h_n = 0$$

Polinomio característico
$r - 1$

entonces las soluciones son $h_n = c \cdot 1^n = c$

<u>Paso 2</u> : Buscamos sucesiones que al evaluar en $n+1$ den "algo parecido"

<u>Ejemplo</u> $f_n = n$, $f_{n+1} = n+1$, entonces tiene sentido buscar soluciones particulares de $*$ de la forma $a_n^* = \alpha \cdot n + \beta$

sustituyo en la ecuación $*$

$$a_{n+1}^* - a_n^* = n \quad \forall n$$

$$\left(\alpha(n+1)+\beta\right) - (\alpha n+\beta) = n \quad \forall n$$

$$\alpha n + \alpha + \beta - \alpha n - \beta = n \quad \forall n$$

$\alpha = n$, no llegué, no hay α y β

no importa, busco en un conjunto más grande:

$$a_n^* = \gamma n^2 + \alpha n + \beta$$

Sustituimos:

$$a^*_{n+1} - a^*_n = n$$

$$\gamma(n+1)^2 + \alpha(n+1) + \beta - (\gamma n^2 + \alpha n + \beta) = n$$

$$\gamma(n^2 + 2n + 1) + \alpha(n+1) + \beta - \gamma n^2 - \alpha n - \beta = n$$

$$\gamma n^2 + 2\gamma n + \gamma + \alpha n + \alpha + \beta - \gamma n^2 - \alpha n - \beta = n$$

$$2\gamma n + \gamma + \alpha = n \quad \forall n$$ $\rightsquigarrow$ ahora es importante

$$= 1 \cdot n + 0$$

Dos polinomios son iguales si y sólo si sus coeficientes son iguales

$$2\gamma = 1 \rightsquigarrow \gamma = \frac{1}{2}$$

$$\gamma + \alpha = 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2} + \alpha = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

β puede ser calquiera (tomemos $\beta = 0$)

Entonces encontramos una solución

$$a^*_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

La solución general entonces es

$$a_n = \underbrace{a_n^*} + \underbrace{h_n}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n} + \underbrace{c}$$

Como siempre, con la condición inicial hallamos c

$a_0 = 0$ porque en 0 personas hay 0 saludos

$$\frac{1}{2}\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

Entonces la solución a nuestro problema es $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

<u>obs</u> esto es igual a $\frac{n(n-1)}{2}$, es coherente con la otra forma que teníamos de resolverlo (menos mal)

Otro ejemplo

(Hice antes el paso 2, pero no importa)

$$a_{n+1} - 2a_n = 3^n$$

Busco en la familia de 3^n, porque $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$

Busco $a^*_n = \alpha \cdot 3^n$

sustituyo

$$a^*_{n+1} - 2a^*_n = 3^n$$

$$\alpha 3^{n+1} - 2\alpha 3^n = 3^n$$

$$\alpha \cdot 3 \cdot \underset{\sim}{3^n} - 2\alpha \cdot \underset{\sim}{3^n} = \underset{\sim}{3^n}$$

$$\alpha \cdot 3 - 2\alpha = 1$$

$$3\alpha - 2\alpha = 1$$

$\alpha = 1$, entonces $a^*_n = 1 \cdot 3^n$ es solución

Paso 1: resuelvo (H)

$$h_{n+1} - 2h_n = 0$$

Polinomio característico: $r-2$ (raíz 2)

Entonces todas las soluciones son de la forma $c \cdot 2^n$

Conclusión: todas las soluciones de

$$a_{n+1} - 2a_n = 3^n$$

son de la forma

$$\underbrace{3^n} + \underbrace{c\,2^n}$$

Si nos dan una condición inicial, despejamos c.

Orden 2

También se puede probar que la resta de dos soluciones de (*) es una solución de (H) (háganlo como ejercicio, tomando como modelo la prueba que hicimos para orden 1). Entonces todas las soluciones de

(*): $A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = f_n$,

van a ser $a_n = a^*_n + h_n$, donde h_n son todas las soluciones de

(H): $A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0$,

y a^*_n es una solución particular de (*) (que vamos a buscar en un conjunto conocido)

Ejemplo

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = n^2 \cdot 4^n \qquad a_0 = 2,\ a_1 = 1$$

Paso 1: resuelvo (H)

$$h_{n+2} + 2h_{n+1} + h_n = 0$$

Polinomio característico: $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$, tiene raíz doble -1

Entonces todas las soluciones de (H) van a ser de la forma

$$h_n = c(-1)^n + d\,\underbrace{n}_{\text{viene de la raíz doble}}(-1)^n$$

Paso 2 Busco a_n^*.

Como $f_n = n^2 \cdot 4^n$, y al evaluar en $n+1$

$$(n+1)^2 4^{n+1} = 4(n+1)^2 4^n = 4(n^2+2n+1)4^n$$

voy a buscar soluciones de la forma

$$a_n^* = \alpha n^2 4^n + \beta n 4^n + \gamma 4^n = (\alpha n^2 + \beta n + \gamma) 4^n$$

Sustituyo en $\circledast$

$$a^*_{n+2} + 2a^*_{n+1} + a^*_n = n^2 4^n$$

$$\left[\left(\alpha(n+2)^2 + \beta(n+2)+\gamma\right)\underbrace{4^{n+2}}_{=4^2\cdot 4^n}\right] + 2\left[\left(\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma\right)\underbrace{4^{n+1}}_{=4^1\cdot 4^n}\right] + \left[\left(\alpha n^2+\beta n+\gamma\right)4^n\right] = n^2 4^n$$

$$= \left(\left(\alpha(n^2+4n+4)+\beta(n+2)+\gamma\right)4^2 + \left(2\alpha(n^2+2n+1)+2\beta(n+1)+2\gamma\right)4 + \left(\alpha n^2+\beta n+\gamma\right)\right)4^n = n^2 4^n$$

(divido)

$$(16\alpha+8\alpha+\alpha)n^2 + (64\alpha+16\beta+16\alpha+8\beta+\beta)n$$
$$+(64\alpha+32\beta+16\gamma+8\alpha+8\beta+8\gamma+\gamma) = n^2$$

$$25\alpha n^2 + (80\alpha+25\beta)n + (72\alpha+40\beta+25\gamma) = n^2$$

$$= 1\cdot n^2 + 0\cdot n + 0$$

Como es $\forall n$:

$$\begin{aligned} 25\alpha &= 1 \\ 80\alpha + 25\beta &= 0 \\ 72\alpha + 40\beta + 25\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Voy despejando α, β y γ

$$\alpha = \frac{1}{25}$$

$$\frac{80}{25} + 25\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\left(-\frac{80}{25}\right)}{25} = \frac{-80}{25^2}$$

$$72 \cdot \frac{1}{25} + 40\left(\frac{-80}{25^2}\right) + 25\gamma = 0$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{-72 \cdot \frac{1}{25} + \frac{40 \cdot 80}{25^2}}{25} = \frac{-72 \cdot 25 + 40 \cdot 80}{25^3}$$

$$= \frac{1400}{25^3}$$

Entonces la solución general es

$$\underbrace{\left(\frac{1}{25} n^2 - \frac{80}{25^2} n + \frac{1400}{25^3}\right) 4^n}_{a_n^*} + \underbrace{c(-1)^n + dn(-1)^n}_{h_n}$$

con a_0 y a_1 calculo c y d

$$a_0 = \left(\frac{1}{25}\cdot 0^2 - \frac{80}{25^2}\cdot 0 + \frac{1400}{25^3}\right)4^0 + c(-1)^0 + d\cdot 0(-1)^0$$

$$= \frac{1400}{25^3} + c = 2$$

↳ condición inicial ⊛

$$c = 2 - \frac{1400}{25^3} = \frac{1194}{25^2} = \frac{1194}{625}$$

$$a_1 = \left(\frac{1}{25}\cdot 1^2 - \frac{80}{25^2}\cdot 1 + \frac{1400}{25^3}\right)\cdot 4^1 + c(-1)^1 + d\cdot 1(-1)^1$$

$$= \frac{400}{25^3} - \frac{1194}{25^2} - d = 1$$

↳ ⊛

$$\Rightarrow d = \frac{400}{25^3} - \frac{1194}{25^2} - 1 = \frac{1803}{25^2} = \frac{1803}{625}$$

Sustituyendo, la solución es

$$a_n = \left(\frac{1}{25} n^2 - \frac{80}{25^2} n + \frac{1400}{25^3}\right) 4^n + c\,(-1)^n + dn\,(-1)^n$$

$$\boxed{a_n = \left(\frac{1}{25} n^2 - \frac{16}{125} n + \frac{56}{625}\right) 4^n + \left(\frac{1194}{625} + \frac{1803}{625} n\right) (-1)^n}$$