

Recurrencias lineales con coeficientes constantes

Recurrencias homogéneas

Orden 1

$$A, B \in \mathbb{R}$$

$$A a_{n+1} + B a_n = 0 \quad \text{(*)} \quad A \neq 0$$

.... (+0)

Todas las soluciones son

$$c r^n, \text{ con } c \in \mathbb{R}, \text{ donde } r = \frac{-B}{A}$$

es la raíz de

$$A r + B = 0 \quad (\text{obs: } A r^{\text{+1}} + B r^{\text{+0}} = 0)$$

viene de sustituir $a_n = r^n$ en la ecuación (*)

En este caso $c = a_0$, lo sacamos
sustituyendo en $a_0 = c r^0 = c \cdot 1$

Orden 2

$$A, B, C \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{+} A \neq 0$$

$$A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0$$

También vamos a buscar soluciones de la forma $c \cdot r^n$

r tiene que ser solución de

$$A r^2 + B r + C = 0$$

Este polinomio se llama polinomio característico

Antes de mirar las raíces, veamos esto en general:

Si (a_n) y (b_n) son soluciones de $\textcircled{+}$

entonces $(a_n + b_n)$ es solución de $\textcircled{+}$

Demostración: usar la definición de "solución" y una cuenta

$$A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0 \quad \forall n$$

(b_n) es solución de *

$$A b_{n+2} + B b_{n+1} + C b_n = 0 \quad \forall n$$

Sumando las igualdades y sacando factor común entre algunos términos

$$A(a_{n+2} + b_{n+2}) + B(a_{n+1} + b_{n+1}) + C(a_n + b_n) = 0$$

Esto es que la sucesión $(a_n + b_n)$

verifica *

□

Raíces reales distintas

Esto nos sirve para decir que hay soluciones de la forma

$$c r_1^n + d r_2^n \quad \text{con } c, d \in \mathbb{R}, \text{ si}$$

$A r^2 + B r + C = 0$ tiene soluciones reales distintas r_1 y r_2

Las constantes c y d
se pueden averiguar con a_0 y a_1

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= c r_1^0 + d r_2^0 = c + d \\ a_1 &= c r_1^1 + d r_2^1 = r_1 c + r_1 d \end{aligned} \right\} \boxed{4}$$

Como toda la sucesión queda
determinada por a_0 y a_1 , y
existen c y d únicos que
verifican el sistema $\boxed{4}$,
todas las soluciones de $\textcircled{4}$
se pueden escribir de
esa forma

Raíz real repetida

Se puede probar que

$a_n = C n r^n$ es solución

de $(*)$, con r raíz de $A r^2 + B r + C = 0$

$$A(n+2)r^{n+2} + B(n+1)r^{n+1} + C n r^n$$

$$= C r^n (A(n+2)r^2 + B(n+1)r + C n)$$

(sacando factores comunes)

$$= C r^n n (A r^2 + B r + C) + C r^{n+1} (A \cdot 2r + B)$$

$A r^2 + B r + C = 0$ porque r es la raíz

como r es raíz doble, también

es raíz de la derivada del
polinomio característico $A \cdot 2r + B$



Como la suma de soluciones de $(*)$ es solución de $(*)$, hay soluciones de la forma

$$c n r^n + d r^n = (c n + d) r^n$$

También acá sacamos c y d

$$\text{de } a_0 = c \cdot 0 r^0 + d r^0 = d$$

$$a_1 = c \cdot 1 r^1 + d r^1 = r c + r d$$

Si $r \neq 0$, el sistema $\begin{pmatrix} 0 & 1 & | & a_0 \\ r & r & | & a_1 \end{pmatrix}$

tiene única solución, y si $r = 0$,

esto implica que $C = 0$,

pero entonces $A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0$ es de orden 1 y ya sabemos resolverlo

Ejemplo:

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$$

El polinomio característico es

$$r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2,$$

entonces tiene raíz doble $r = -1$

entonces todas las soluciones son de la forma

$$a_n = c n (-1)^n + d (-1)^n$$

Supongamos que tenemos condición inicial $a_0 = 2$, $a_1 = 4$

$$a_0 = c \cdot 0 (-1)^0 + d (-1)^0 = d = 2$$

$$a_1 = c \cdot 1 (-1)^1 + d (-1)^1 = -c - d = 4$$

$$-C - 2 = 4 \Leftrightarrow -C = 4 + 2 = 6 \Leftrightarrow C = -6$$

Entonces la solución es

$$a_n = (-6n + 2)(-1)^n$$

Verificamos que es solución

$$a_0 = (-6 \cdot 0 + 2)(-1)^0 = 2 \cdot 1 = 2 \quad \checkmark$$

$$a_1 = (-6 \cdot 1 + 2)(-1)^1 = (-4)(-1) = 4 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} & \boxed{a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n} \\ &= (-6(n+2) + 2)(-1)^{n+2} + 2(-6(n+1) + 2)(-1)^{n+1} \\ & \quad + (-6n + 2)(-1)^n \\ &= (-1)^n \left((-6(n+2) + 2)(-1)^{\overbrace{2}^{=1}} + 2(-6(n+1) + 2)(-1) \right. \\ & \quad \left. + (-6n + 2) \right) \end{aligned}$$

$$= (-1)^n \left(-6(n+2) + 2 + 12(n+1) - 4 - 6n + 2 \right)$$

$$= (-1)^n \left(\underbrace{-6n}_{\text{red}} - \cancel{12}_{\text{yellow}} + \underbrace{2}_{\text{yellow}} + \underbrace{12n}_{\text{red}} + \cancel{12}_{\text{yellow}} - \underbrace{4}_{\text{yellow}} - \underbrace{6n}_{\text{red}} + \underbrace{2}_{\text{yellow}} \right) = (-1)^n \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

