Recurrencias lineales con coeficientes constantes

En general: • Tenemos una ecuación que involucra varios términos de una sucesión, y queremos encontrar todas las sucesiones que la verifican (se llaman soluciones)

• A veces, de esas soluciones elegimos una que cumpla con ciertas condiciones iniciales (primer(os) término(s) de la sucesión)

Orden 1

$$A a_n + B a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 1, \quad A \neq 0$$

También se puede escribir

$$A a_{n+1} + B a_n = 0 \quad \forall n \geq 0, \quad A \neq 0$$

$A a_1 + B a_0 = 0$
$A a_2 + B a_1 = 0$
$A a_3 + B a_2 = 0$
$A a_4 + B a_3 = 0$
$\vdots$

Vimos el lunes que todas las soluciones son de la forma $a_n = c \cdot r^n$, donde $r = \frac{-B}{A}$, $c = a_0$

Esto es porque $r = \frac{-B}{A}$ verifica $A \cdot r + B = 0$
(un polinomio de grado 1 en r)

Orden 2

$$A a_n + B a_{n-1} + C a_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq 2 \;, \quad A \neq 0$$

También se puede escribir

$$A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0 \quad \forall n \geq 0, \quad A \neq 0$$

Es lo mismo que decir

$$A a_2 + B a_1 + C a_0 = 0$$
$$A a_3 + B a_2 + C a_1 = 0$$
$$A a_4 + B a_3 + C a_2 = 0$$
$$\vdots$$

Ejemplo famoso: Sucesión de Fibonacci

"cada término es la suma de los dos anteriores"

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq 2$$

También

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$$

Aparece un montón en Biología

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$ 1 1 2 3 5 8 13 21 ....

$a_2 = a_1 + a_0 = 1+1 = 2$ 34 55 89 ....

$a_3 = a_2 + a_1 = 2+1 = 3$

$a_4 = a_3 + a_2 = 3+2 = 5$

¿ podemos hallar las soluciones ?

¿ será parecido a las de orden 1 ? Probemos.

¿ Qué pasa si buscamos soluciones de la forma $a_n = C r^n$?

En la ecuación

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

$$C r^{n+2} - C r^{n+1} - C r^n = 0$$

...

$$C r^n (r^2 - r - 1) = 0$$

si C o $r = 0$, Tenemos la solución $a_n = 0$

si no, tiene que ser $r^2 - r - 1 = 0$ (polinomio de grado 2 en r)

las soluciones de esto son $r = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Quiere decir que $a_n = C \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

es solución, también $d \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$,

y también la suma

En general, para una recurrencia lineal con coeficientes constantes, la suma de dos soluciones es solución.
(después del parcial lo demostraremos)

Entonces hay un montón de soluciones, de la forma $a_n = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

¿Cuál será la solución que cumple las condiciones iniciales $a_0 = 1$, $a_1 = 1$?

Sustituimos:

$$a_0 = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1$$

$$c + d = 1$$

$$a_1 = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}c + \frac{1-\sqrt{5}}{2}d = 1$$

2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas

$$(1+\sqrt{5})c + (1-\sqrt{5})d = 2$$

$$c + \sqrt{5}c + d - \sqrt{5}d = 2$$

$c+d=1$

$$1 + \sqrt{5}c - \sqrt{5}d = 2$$

$$\sqrt{5}c - \sqrt{5}d = 1$$

$$c - d = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{sumo} \quad c + d = 1$$

$$2c = \frac{1}{\sqrt{5}} + 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}$$

$$d = 1 - c = 1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Entonces los términos de la sucesión de Fibonacci son

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ej, $a_4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4 = \underline{\underline{5}}$

Caso general

$$A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0 \quad \forall n \geq 0, \; A \neq 0$$

Buscamos soluciones que sean (sumas de) potencias por números

Para tener una solución $a_n = c\, r^n$:

la ecuación queda

$$A c r^{n+2} + B c r^{n+1} + C c r^n = 0$$

$$c r^n (A r^2 + B r + C) = 0$$

El polinomio $Ax^2 + Bx + C$, se llama polinomio característico de la recurrencia

Proposición: si este polinomio tiene 2 raíces reales distintas r_1 y r_2, las soluciones son todas de la forma

$$a_n = c r_1^n + d r_2^n \quad c, d \in \mathbb{R}$$

Dem: Primero vemos que estas son soluciones, sustituyendo en la recurrencia:

¿? $A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0$, a ver qué da

$$A\left(c r_1^{n+2} + d r_2^{n+2}\right) + B\left(c r_1^{n+1} + d r_2^{n+1}\right) + C\left(c r_1^n + d r_2^n\right)$$

separo lo de r_1 y lo de r_2

$$= A c r_1^{n+2} + B c r_1^{n+1} + C c r_1^n + A d r_2^{n+2} + B d r_2^{n+1} + C d r_2^n$$

$$= c r_1^n \underbrace{\left(A r_1^2 + B r_1 + C\right)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + d r_2^n \underbrace{\left(A r_2^2 + B r_2 + C\right)}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$$

por la definición de r_1 y r_2, eran las raíces del polinomio $Ax^2 + Bx + C$

Ahora, si podemos determinar c y d a partir de a_0 y a_1, ya está, porque fijados a_0 y a_1 hay una única solución.

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= c\, r_1^0 + d\, r_2^0 = c + d \\ a_1 &= c\, r_1^1 + d\, r_2^1 = r_1 c + r_2 d \end{aligned}\right\}$$

Esto es un sistema lineal de incógnitas c, d, y de matriz $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ r_1 & r_2 & a_1 \end{array}\right)$

Como $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$, (porque $r_1 \neq r_2$ en esta proposición)

este sistema tiene una única solución, $\bar{c}$ y $\bar{d}$

con esos $\bar{c}$ y $\bar{d}$ hallados en el sistema

$$\begin{aligned} a_0 &= \bar{c}\, r_1^0 + \bar{d}\, r_2^0 \\ a_1 &= \bar{c}\, r_1^1 + \bar{d}\, r_2^1 \end{aligned}$$

como ambos lados de la igualdad verifican la recurrencia, y la solución es única, son iguales.

$(a_n) \rightsquigarrow a_0, a_1 \rightsquigarrow \bar{c}, \bar{d} \rightsquigarrow$ fórmula $a_n = \bar{c}\, r_1^n + \bar{d}\, r_2^n$

Ejemplo: Resolver

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \quad , \quad a_0 = 50,\ a_1 = 120$$

El polinomio característico es

$x^2 - 5x + 6$, tiene raíces $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$

Entonces la solución es

$$a_n = c\,2^n + d\,3^n$$

Ahora el sistema

$$a_0 = c \cdot 2^0 + d \cdot 3^0 = c + d = 50$$

$$a_1 = c \cdot 2^1 + d \cdot 3^1 = 2c + 3d = 120$$

$\times(-2)$

Resolvemos

$$-2c - 2d = -100$$

$$d = 20$$

$$c = 30$$

Entonces $a_n = 30 \cdot 2^n + 20 \cdot 3^n$