Sucesiones definidas por relaciones de recurrencia

Una sucesión es una función que tiene por dominio $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

En vez de $f(n)$, escribimos a_n

y en vez de f escribimos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$a_n, n \in \mathbb{N}$; $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Si escribimos sólo a_n nos referimos al n-ésimo término de la sucesión

Ej: cantidad de elementos de conjuntos que dependen de n

1) $a_n = P_n = n!$

2) $a_n = \#\{$funciones del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ en el conjunto $\{1, 2, 3\}\}$

3) $a_n = \#\{$saludos entre n personas que recién se encuentran$\} = C^n_2$

Algunas sucesiones se pueden definir de manera explícita (directa, cerrada)

Ej: 2) y 3) Tenemos una definición directa.

También podemos hallar fórmulas cerradas: Me das la n y haciendo cuentas calculo a_n

2) Se puede probar que $a_n = 3^n$ (ahora lo vemos)

3) Vimos con argumentos combinatorios que $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

1) Para calcular $n!$ tenemos que hacer una cantidad de cuentas que dependen de n

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = \overbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}^{(n-1)!}\, n$$

$$n! = n(n-1)! \qquad 0! = 1$$

$$a_n = n\, a_{n-1} \quad \forall n \geq 1, \quad a_0 = 1$$

Esto se llama ecuación en recurrencia

relación de recurrencia

recurrencia

A veces partimos de una ecuación en recurrencia y queremos saber todas las sucesiones que la verifican, estas se llaman <u>soluciones</u>

<u>Ej:</u> $a_n = a_{n-1} + 1$

$a_n = n$ es solución.

$(0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \ldots)$ $a_n = a_{n-1} + 1$ ¿? $n = (n-1)+1$ ✓

a_0, a_1, a_2, a_3 es solución

$(-1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \ldots)$ también son soluciones

$(-4, -3, -2, 1, 2, \ldots, \ldots)$ (expresarlas y verificarlas)

¿cómo hallarlas todas? ¿Podemos?

Recurrencias de primer orden.

Son las que se definen como

$$a_n = F(a_{n-1}, n)$$

Estas, fijado a_0, tienen una única solución

Ej: $a_n = a_{n-1} + 1$

si $a_0 = 2$

$a_1 = a_0 + 1 = 2 + 1 = 3$

$a_2 = a_1 + 1 = 3 + 1 = 4 \ldots$

Podemos probar por inducción que, fijada una condición inicial, la sucesión es única

primer valor de la sucesión: a_0

$P(m)$: Fijado a_0, los $a_1, a_2, \ldots, a_m$ que verifican la recurrencia son únicos

De otra forma: Fijado a_0, la sucesión (a_n) está definida para los primeros $m+1$ términos (del 0 al m)

PB: a_0 está definido (obvio)

PI: $P(k)$: Los términos hasta el k están definidos

$P(k+1)$: Los términos hasta el $k+1$ están definidos

La recurrencia da una forma de definir a_{k+1} a partir de a_k, y a_k ya está definido, entonces a_{k+1} también

obs. Si a_n depende no de uno, sino de todos los anteriores, el argumento anterior también funciona.

orden 2:

- Si a_n depende de a_{n-1} y a_{n-2}, la solución es única dependiendo de a_0, a_1

(se puede generalizar a orden p)

otro ejemplo: el 2) de arriba.

$a_n = \#\{$funciones de $\{1,2,\dots,n\}$ en $\{1,2,3\}\}$

Para definir los n valores, si ya tenía n-1 valores definidos, me falta elegir el n-ésimo, y puedo hacerlo de 3 formas distintas

$$a_n = a_{n-1} \cdot 3$$

Por otro lado, $a_0 = 1$ (sólo tenemos la función vacía)

(si queremos empezar en a_1, también es claro que $a_1 = 3$)

Por el teorema anterior, ya sabemos que hay una única solución

Además, usando esta recurrencia podemos ver qué valores toma

$a_0 = 1$

$a_1 = a_0 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$

$a_2 = a_1 \cdot 3 = (1 \cdot 3) \cdot 3 = 9 = 3^2$

Acá vamos viendo que a_n coincide con 3^n en los primeros valores

¿será que $a_n = 3^n$ es solución?

¿$a_n = a_{n-1} \cdot 3$? ¿$a_0 = 1$?

$3^n = 3^{n-1} \cdot 3$ ✓ $3^0 = 1$ ✓

Esto es un ejemplo de una <u>recurrencia</u> <u>lineal</u> <u>homogénea</u> <u>con</u> <u>coeficientes</u> <u>constantes</u>

$$A\, a_n + B\, a_{n-1} = 0$$

Lo que hicimos antes es la recurrencia lineal $a_n - 3a_{n-1} = 0$ $(A=1, B=-3)$

Las soluciones dieron $a_0 \cdot 3^n$, si cambiamos el A y el B, ¿tendremos soluciones de la forma $C \cdot r^n$?

Lo vamos a resolver de 2 formas

(1) Intuitiva: $A a_n + B a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 1$

Si A y B son 0, no estoy definiendo nada

Si $A=0$ y $B \neq 0$,

la única solución es $a_n = 0 \quad \forall n$

Si no, $A a_n = -B a_{n-1}$

$$a_n = \frac{-B}{A} a_{n-1}$$

$$a_1 = \frac{-B}{A} \cdot a_0$$

$$a_2 = \frac{-B}{A} \cdot a_1 = \left(\frac{-B}{A}\right)\left(\frac{-B}{A}\right) a_0 = \left(\frac{-B}{A}\right)^2 a_0$$

$$a_3 = \frac{-B}{A} a_2 = \left(\frac{-B}{A}\right)^2 \left(-\frac{B}{A}\right) a_0 = \left(-\frac{B}{A}\right)^3 a_0$$

¿será que $a_n = \underbrace{\left(\frac{-B}{A}\right)}_{r}^{n} \underbrace{a_0}_{C}$ es solución?

$\boxed{*}$ A ver si verifica $A a_n + B a_{n-1} = 0$

¿?: $A \left(\frac{-B}{A}\right)^n a_0 + B \left(-\frac{B}{A}\right)^{n-1} a_0 = 0$

Escribimos $\left(-\frac{B}{A}\right)^n = \left(-\frac{B}{A}\right) \cdot \left(-\frac{B}{A}\right)^{n-1}$

$$A\left(-\frac{B}{A}\right)\left(-\frac{B}{A}\right)^{n-1} a_0 + B\left(-\frac{B}{A}\right)^{n-1} a_0$$

$$= -B\left(-\frac{B}{A}\right)^{n-1} a_0 + B\left(\frac{B}{A}\right)^{n-1} a_0 = 0 \quad \checkmark$$

2) Deductiva. Planteamos $a_n \; c r^n$ y nos fijamos si hay algún c y r que hagan cumplir la recurrencia

$$A a_n + B a_{n-1} = 0$$

$$A c r^n + B c r^{n-1} = 0 \qquad r^n = r \cdot r^{n-1}$$

$$(Ar + B) c r^{n-1} = 0$$

Si c o r son 0, ya sabemos que $a_n = 0$ verifica

si no,

$$Ar + B = 0 \Rightarrow r = \frac{-B}{A}.$$

$a_n = c\left(-\frac{B}{A}\right)^n$ De acá lo verificamos $\boxtimes$

Si a_0 = condición inicial está fija,

$$a_0 = C\left(-\frac{B}{A}\right)^0 = C$$

Este método parece innecesariamente complicado para las recurrencias de orden 1, pero va a ser útil para las recurrencias de orden 2 (y mayores), donde la solución puede no ser tan clara intuitivamente.