# Formas de distribuir pelotitas en cajas

(Resumen de las características de cada problema)

A) Pelotitas indistinguibles, cajas indistinguibles

Lo único que importa son los números de pelotitas en cada caja, pero además no importa el orden entre ellos

Si el número de cajas no está fijo, y pedimos que todas las cajas tengan al menos una pelotita,

Ej: 4 pelotitas

$4 = 1+1+1+1$

$4 = 2+1+1 \quad = \quad 1+2+1 = 1+1+2$ en este problema son iguales

$4 = 2+2$ Número de particiones

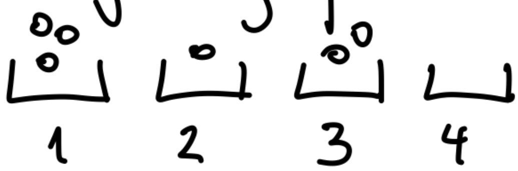
$4 = 3+1$ de un número.

$4 = 4$ No hay una fórmula explícita

B) Pelotitas indistinguibles, cajas distinguibles

1) Combinaciones con repetición

Si el número de cajas y pelotitas está fijo




$x_1 = 3$

$x_2 = 1$

$x_3 = 2$

$x_4 = 0$

- Si ninguna puede quedar vacía, o cualquier otra restricción $(=, \leq, \geq, <, >)$ en la cantidad de pelotitas en cada caja, podemos cambiar o agregar variables y también lo resolvemos con combinaciones con repetición

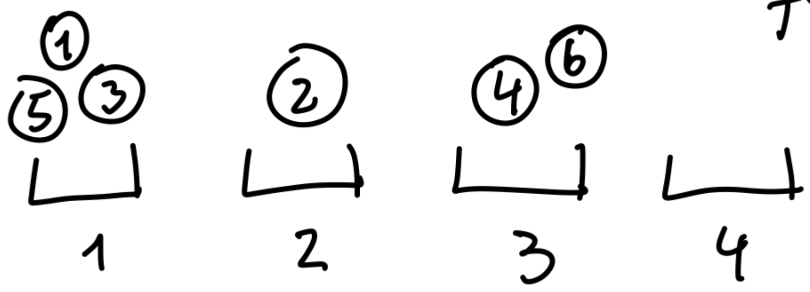
C) Pelotitas distinguibles, cajas indistinguibles

Tenemos todas las formas de partir el conjunto de pelotitas

- Para una cantidad fija de cajas, $n$ (no vacías) y una cantidad fija de pelotitas, $m$, está el número de Stirling de 2° tipo $S(m,n)$
- Si no importa el número de cajas, $S(m,1) + S(m,2) + \cdots + S(m,m)$

D) m Pelotitas distinguibles, n cajas distinguibles

<u>Funciones</u>: $f$(pelotita) = caja en la que está



$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=1$,
$f(4)=3$, $f(5)=1$, $f(6)=3$

1) Sin restricciones: $n^m$

2) Cajas no vacías: funciones sobreyectivas
Sob(m,n)
(lo calculamos con inclusión-exclusión)
si $m < n$, esta cantidad es 0 (no hay funciones sobreyectivas)

3) No se puede repetir: funciones inyectivas
Arreglos $A^n_m = \frac{n!}{(n-m)!}$
si $m > n$, esta cantidad es 0
(no hay funciones inyectivas)

Cuando $m=n$, contar 2) y contar 3) es lo mismo (si una función no es sobreyectiva, no es inyectiva, y viceversa)
La cantidad es $m!$ : Permutaciones

---

¿Qué pasa con las funciones de $m$ pelotitas en $n$ cajas cuando $m>n$?
Como no hay funciones inyectivas, alguna caja va a tener al menos 2 pelotitas distintas.
Esto se llama Principio del Palomar (P.P.)
o Principio de Dirichlet
Porque alguna vez Dirichlet lo formuló con palomas en lugar de pelotitas, y con nidos de un palomar en lugar de cajas.

Principio del Palomar: Si $m$ palomas van a $n$ nidos, y $m>n$, entonces en algún nido hay 2 o más palomas.

Aplicaciones:

1) En el teórico T4 hay al menos dos personas que este año van a sacar el mismo puntaje en el 2° parcial.

palomas $\rightsquigarrow$ estudiantes (hay 78)

nidos $\rightsquigarrow$ puntajes: de 0 a 60 (hay 61)

2) De lunes a sábado me fijo qué estudiante comió naranja y qué estudiante no

L : sí o no (2 opciones)

M : " " "

X : " " "

J :

V : " " "

S :

hay $2^6 = 64$ posibles conjuntos de días en los cuales se comió naranja o no (estos son los nidos)

Por el principio del Palomar, como $78 > 64$, hay al menos 2 personas que entre lunes y sábado de la semana pasada comieron naranja los mismos días

3) Todas las personas tienen menos de 1 000 000 pelos en la cabeza

Entonces en Uruguay hay al menos dos personas con la misma cantidad de pelos en la cabeza, en cada momento. (Uruguay tiene más de 1 000 001 de personas)

Palomas: Personas en Uruguay

Nidos: números del 0 al 1 000 000 (hay 1000001)

Lo que es inchequeable es quiénes son

Pero podemos decir algo más, porque Uruguay en realidad tiene más de 3 000 003 personas

Si hubiera a lo sumo 3 personas con igual cantidad de pelos, para cada cantidad de pelos posible, tendría que haber a lo sumo 3 000 003 personas en Uruguay, y esto es falso.

Entonces, al menos hay 4 personas con la misma cantidad de pelos

## Principio del Palomar Generalizado:

Si hay $m$ palomas que van a $n$ nidos, y $m > kn$, entonces en algún nido hay al menos $k+1$ palomas.

Demostración por absurdo:
si en todos los nidos hay $\leq k$ palomas, la cantidad de palomas sería $\leq nk$

4) Si elijo 51 números enteros cualesquiera, al menos 6 de ellos terminan en el mismo dígito

$$51 > 5 \cdot \underbrace{10}_{\text{cantidad de dígitos}}$$