Conteo de funciones sobreyectivas (Repaso)

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, queremos contar la cantidad de funciones sobreyectivas de $\{1, \ldots, m\}$ en $\{1, \ldots, n\}$

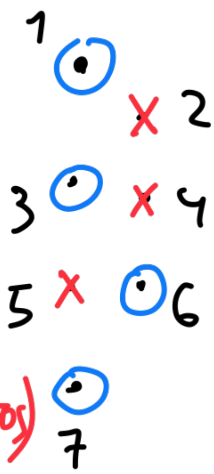
Aplicamos el P.I.E, en el conjunto $\{f$ función de $\{1, \ldots, m\}$ en $\{1, \ldots, n\}\}$, con las condiciones

$C_i(f)$: el número i no está en la imagen de f,

para cada $i = 1, \ldots, n$ (los del codominio)

Dados ℓ elementos del codominio $i_1, \dots, i_\ell$, las funciones que cumplen $c_{i_1} \cdots c_{i_\ell}$ son las funciones de $\{1, \dots, m\}$ en $\{1, \dots, n\}$ que no tienen en su imagen a $i_1, \dots, i_\ell$, o sea las funciones de $\{1, \dots, m\}$ en $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_\ell\}$

Por ejemplo, si $m = 10$, $n = 7$, $i_1 = 2$, $i_2 = 4$, $i_3 = 5$.



Las funciones de $\{1, \dots, 10\}$ en $\{1, \dots, 7\}$ que no tienen $2, 4, 5$ en la imagen, (3 elementos) son las funciones de $\{1, \dots, 10\}$ en $\{1, 3, 6, 7\}$ (4 elementos)

Entonces

$$N(c_{i_1} \cdots c_{i_\ell}) = \#\{\text{funciones de un conjunto de } \underset{\sim}{m} \text{ elementos en un conjunto de } \underset{\sim}{n-\ell} \text{ elementos}\}$$

$$= (n-\ell)^m$$

Además, esto no depende de cuáles son $i_1, \ldots, i_\ell$, sólo depende de cuántos son.

Al sumar todos los $N(c_{i_1} \cdots c_{i_\ell})$ con un ℓ fijo, queda $(n-\ell)^m$ sumado tantas veces como subconjuntos de ℓ elementos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, esto es C_ℓ^n veces $(n-\ell)^m = C_\ell^n (n-\ell)^m$

Entonces, por el P.I.E,
la cantidad de funciones que no dejan ningún i fuera de su imagen es

$$N(\bar{C}_1 \cdots \bar{C}_n) = n^m - C_1^n (n-1)^m + C_2^n (n-2)^m - \cdots$$

$$\cdots \pm C_n^n (n-n)^m$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell C_\ell^n (n-\ell)^m$$

Ejemplo: Hay 5 estudiantes que van a venir a mi oficina entre los días Lunes, Miércoles y Viernes, por lo menos una persona va a venir cada día.

Cada estudiante viene un solo día. ¿cuántas formas hay de distribuir las visitas en esos 3 días?

$A = \{\text{estudiantes}\}$, $B = \{\text{días}\}$

$f(x) =$ el día que x va a la oficina

$f: A \to B$ tiene que ser una función sobreyectiva

La cantidad de formas de distribuirse para venir a la oficina es

$$\text{sob}(5,3) = C^3_0\, 3^5 - C^3_1\, 2^5 + C^3_2\, 1^5 - C^3_3\, 0^5$$

$$= 1 \cdot 243 - 3 \cdot 32 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 243 - 96 + 3$$

$$= 150$$

Números de Stirling de 2º tipo

Pensemos un problema ligeramente distinto: 5 estudiantes tienen que dividirse en 3 grupos. ¿De cuántas formas pueden hacerlo?

(Puede haber grupos de 1, 2, ... cantidad de estudiantes, pero no de 0 estudiantes)

Es lo mismo que el problema anterior, pero los grupos son indistinguibles

$$\begin{array}{ccccc} E & B & P & N & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ L & M & V & V & L \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} E & B & P & N & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ M & V & L & L & M \end{array}$$

En este problema es

$$\{E, M\} \quad \{B\} \quad \{P, N\}$$

también

¿Cómo lo resolvemos? Lo hacemos para grupos distinguibles (por ej, a un grupo lo llamo "Lunes", a otro "Miércoles" y al otro "Viernes"), y después dividimos entre la cantidad de permutaciones de esos nombres

En total son $\dfrac{Sob(5,3)}{3!} = \dfrac{150}{6} = 25$

$$n \text{ distinguibles} \underset{\times\, n!}{\overset{\div\, n!}{\rightleftarrows}} n \text{ indistinguibles}$$

---

otra forma para ver si contamos bien

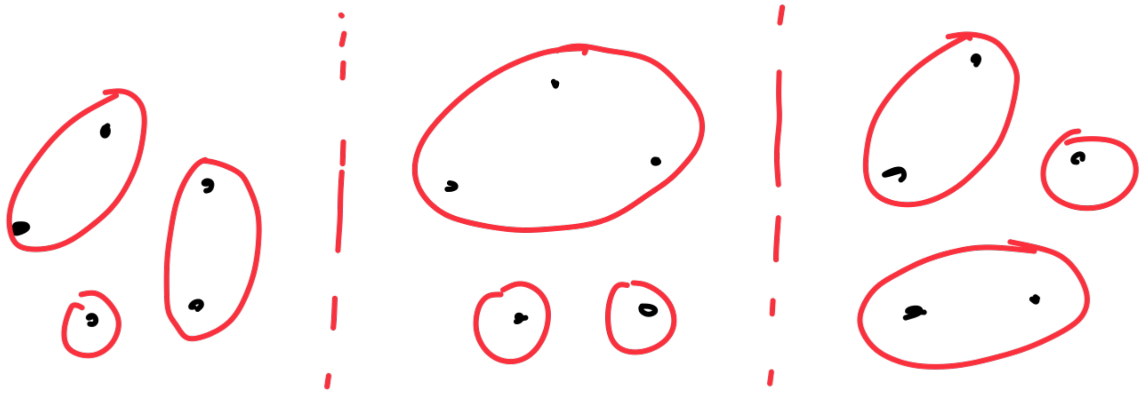
dos posibilidades A) un grupo de 3, dos de 1

B) un grupo de 1, dos de 2

A) $= \underline{C^5_3} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10$ | B) $= \dfrac{C^5_2 \cdot C^3_2}{2} = \dfrac{10\cdot 3}{2} = 15$

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ $m \geq n$, el número de Stirling de segundo tipo $S(m,n)$, es la cantidad de formas de partir un conjunto de m elementos en n conjuntos no vacíos

(los conjuntos son indistinguibles)



Los números de Stirling de segundo tipo son $S(m,n) = \dfrac{sob(m,n)}{n!}$