Aplicaciones del P.I.E.

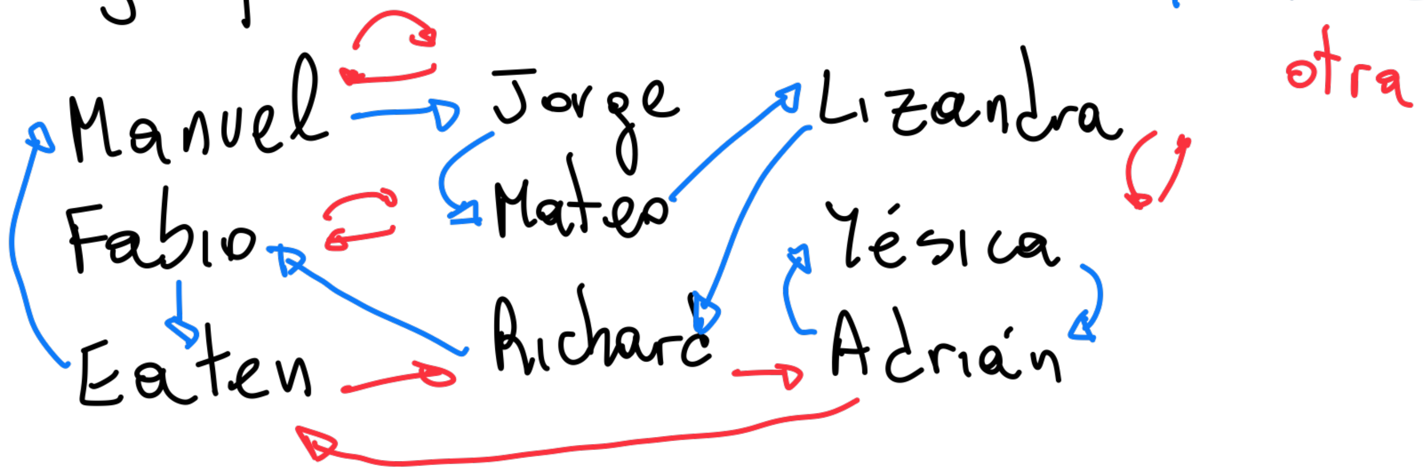
Juego: Amigo/a invisible

Hay n personas, y cada una le va a hacer un regalo a alguien de forma secreta

- Todas las personas dan un regalo
- Todas las personas reciben un regalo
- Ninguna persona se hace un regalo a sí misma

¿Cuántas distribuciones diferentes puede haber?

Ejemplo:



Aparecen permutaciones

$A = \{$personas que juegan Amigo/a Invisible$\}$

Si x le regala a y, podemos definir $f(x) = y$

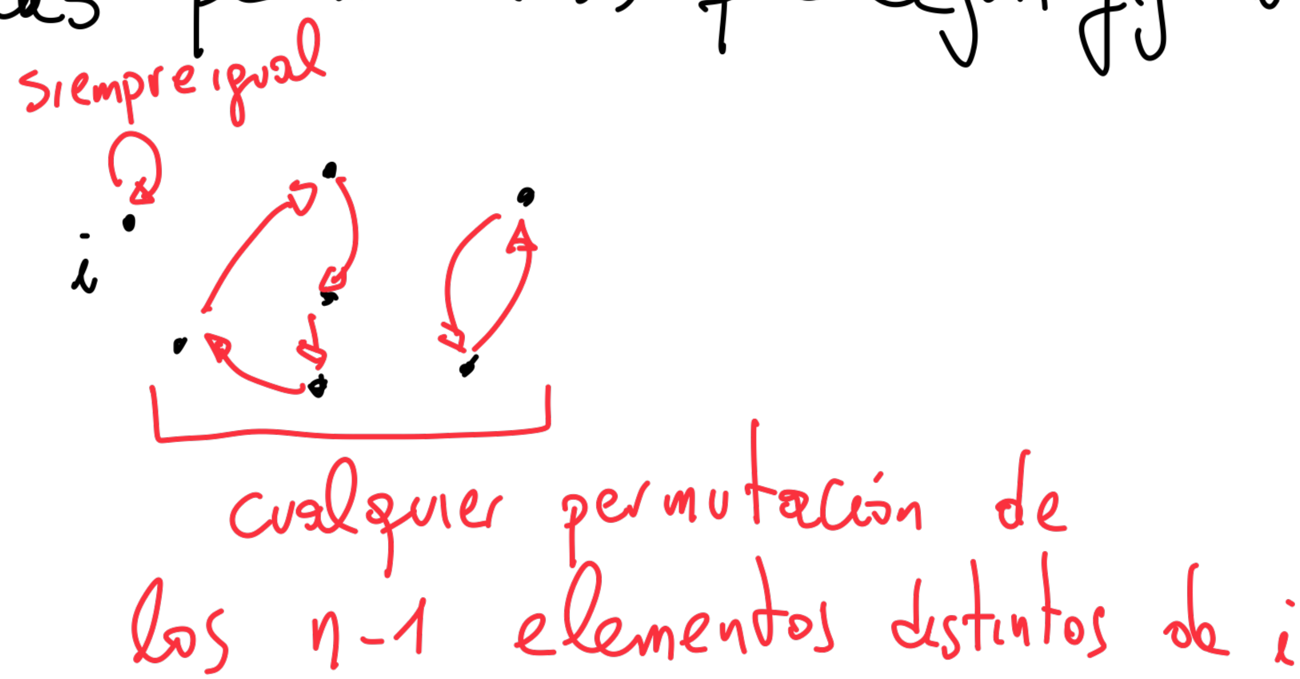
Como a cada persona y le regale exactamente una persona x, la función f es una permutación

Además, $f(x) \neq x \quad \forall x \in A$

Decimos que f no tiene elementos fijos

La cantidad de formas diferentes de jugar en el mismo conjunto de personas, es igual a la cantidad de permutaciones sin elementos fijos. ¿Cómo la calculamos?

Observación: si i es un elemento de A, podemos contar las permutaciones que dejan fijo i



Son en total $(n-1)!$ permutaciones que fijan i

Sea B el conjunto de todas las permutaciones de $A = \{1, 2, \dots, n\}$

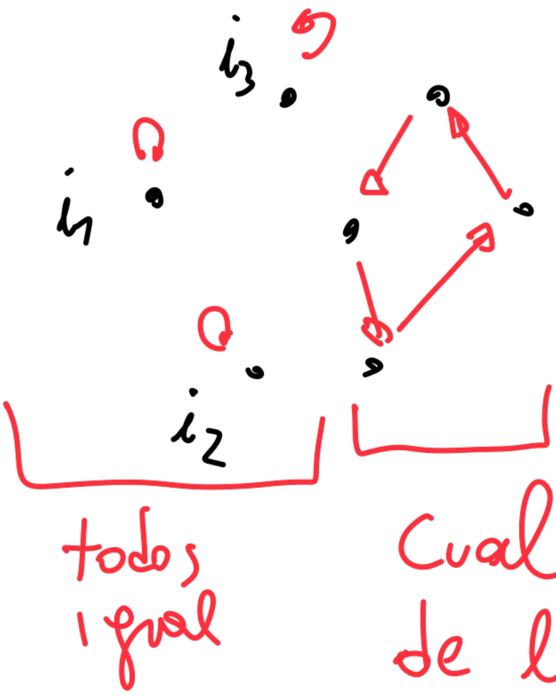
$C_i(f)$: La permutación f fija el elemento i

Lo que queremos calcular es la cantidad de permutaciones que no fijan ningún elemento i, o sea, $N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\dots\overline{C_n})$. Usamos el P.I.E.

$$N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\dots\overline{C_n}) = N + \sum_{l=1}^{n} (-1)^l \begin{bmatrix} \text{suma de los} \\ N(C_{i_1} C_{i_2} \dots C_{i_l}) \end{bmatrix}$$

(l condiciones a la vez)

Si miramos ℓ elementos $i_1, i_2, \dots, i_\ell$, las permutaciones que los fijan a todos ellos son



Cualquier permutación de los $n-\ell$ elementos distintos de $i_1, i_2, \dots, i_\ell$

son $(n-\ell)!$ permutaciones distintas

Este valor es el mismo para todas las formas de elegir $\{i_1, i_2, \dots, i_\ell\}$

Entonces, la suma que aparece en el corchete ℓ-ésimo, tiene todos sus términos iguales a $(n-\ell)!$, y la cantidad de términos es $C^n_\ell = \dfrac{n!}{\ell!\,(n-\ell)!}$

Entonces, la suma de todos los $N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_\ell})$ es $\underbrace{C^n_\ell}_{\#\text{sumandos}} \cdot \underbrace{(n-\ell)!}_{\text{cuánto valen}} = \dfrac{n!}{\ell!}$

Juntando todo en la fórmula,

$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2} \cdots \overline{c_n}) = n! + \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^\ell \frac{n!}{\ell!}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \underbrace{(-1)^\ell}_{\text{el signo va cambiando}} \frac{n!}{\ell!} = n! \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}$$

Este número se llama número de desórdenes de n elementos, y se escribe d_n.

En el ejemplo son 9 personas, entonces la cantidad de juegos diferentes es

$$d_9 = 9!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!}\right)$$

Otra aplicación: funciones sobreyectivas

Ahora cada estudiante le hace un regalo a un/a docente del curso

1903 estudiantes, 8 docentes

Pero queremos que cada docente reciba al menos un regalo (*)

Entonces, por ejemplo, no puede regalarle todo el mundo a Javier.

Si x le regala a y, podemos definir una función $f: \{\text{estudiantes}\} \to \{\text{docentes}\}$

$$f(x) = y$$

La condición (*) es que la funcón f sea sobreyectiva

Sea $A = \{1, .., m\}$, $B = \{1, .., n\}$, con $m \geq n$.

Queremos contar las funciones sobreyectivas de A en B.

¿Qué sabemos contar?

Sabemos contar todas las funciones de A en B

$f(1)$: n opciones, $f(2)$: n opciones, ..., $f(m)$: n opciones

Total: n^m funciones (este es N)

En el conjunto $F = \{ f \text{ función de } A \text{ en } B \}$ vamos a aplicar el P.I.E.

¿Cómo sería la condición "a Javier le llegó algún regalo"?

Difícil de contar.

Sin embargo, "a Javier no le llegó ningún regalo" es más fácil de contar

Hay $8 - \underbrace{1}_{\text{Javier}} = 7$ docentes que reciben regalos de cualquier forma posible

Esto se puede expresar como

$C_i(f)$: f no alcanza el valor i

i no está en la imagen de f (queda afuera)

Queremos calcular $N(\bar{C}_1 \bar{C}_2 \ldots \bar{C}_n)$

otra vez, $N(C_{i_1} C_{i_2} \cdots C_{i_\ell})$ es

el mismo para todos los conjuntos $\{i_1, i_2, \ldots i_\ell\}$

Es la cantidad de funciones que no llegan a $i_1, i_2, \ldots, i_\ell$

Es lo mismo que definir cualquier función que llegue a los $n-\ell$ restantes: $(n-\ell)^m$

El ℓ-ésimo sumando va a ser $\underbrace{C^n_\ell}_{\text{cantidad de términos}} \underbrace{(n-\ell)^m}_{\text{cuánto valen}}$

porque son funciones sobreyectivas

El número total se llama $Sob(m,n)$ y es

$$sob(m,n) = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell C^n_\ell (n-\ell)^m$$

En el ejemplo $m = 1903$, $n = 8$

$$\begin{aligned} Sob(1903, 8) = {} & C_0^8\, 8^{1903} - C_1^8\, 7^{1903} + C_2^8\, 6^{1903} \\ & - C_3^8\, 5^{1903} + C_4^8\, 4^{1903} - C_5^8\, 3^{1903} \\ & + C_6^8\, 2^{1903} - C_7^8\, 1^{1903} + C_8^8\, 0^{1903} \end{aligned}$$