Principio de Inclusión - Exclusión

sé contar lo opuesto — cuento lo que necesito

Sea A un conjunto de N elementos y $C_1, C_2, \ldots, C_k$ proposiciones sobre elementos de A

Estas proposiciones, llamadas condiciones, van a ser verdaderas para algunos elementos y falsas para otros

Ejemplos:

- $A = \mathbb{Z}$
  $C_i(x)$: x es par
- A: {funciones de S en S}
  $C_i(f)$: f es biyectiva

Para cada condición C_i,

$$N(C_i) = \#\{a \in A : C_i(a) \text{ es verdadera}\}$$

= cantidad de elementos de A que cumplen C_i

Otras definiciones:

- Si C_i es una condición, llamamos $\overline{C_i}$ a su opuesta ($=$ no C_i)

- Para C_i, C_j condiciones, $C_iC_j = C_i$ y C_j a la vez

Teorema

Para k condiciones $C_1, C_2, \dots, C_k$ en un conjunto de tamaño n,

los que no cumplen ninguna

$$N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\cdots\overline{C_k}) = N$$

$$- \Big[\overbrace{N(C_1) + N(C_2) + \dots + N(C_k)}^{N(C_i)}\Big]$$

$$+ \Big[N(C_1C_2) + N(C_1C_3) + \dots + N(C_1C_k)$$

$$+ N(C_2C_3) + \dots + N(C_2C_k)$$

$$+ N(C_3C_4) + \dots + \dots + N(C_{k-1}C_k)\Big]$$

$N(C_iC_j)$

$i \neq j$

$$-\left[N(c_1c_2c_3)+N(c_1c_2c_4)+\cdots \right.$$

$$\left. \cdots + N(c_{i_1}c_{i_2}c_{i_3}) + \cdots + N(c_{k-2}c_{k-1}c_k)\right]$$

$i_1 \neq i_2$
$i_1 \neq i_3$
$i_2 \neq i_3$

$+$

$-$

$+$

$-$

$\vdots$

$$N(c_1c_2\cdots\cdots c_k)$$

Versión en castellano

#{los que no cumplen ninguna}

= #{todos}

− [Suma de los que cumplen cada condición]

+ [Suma de los que cumplen cada conjunto de 2 condiciones]

$-$ [suma de los que cumplen cada conjunto de 3 condiciones]

$+$

$-$

$+$

$-$

$\vdots$

$\pm$ [suma de los que cumplen cada conjunto de k-1 condiciones]

$\mp$ [los que cumplen las k condiciones]

Versión en matemática

$$N(\overline{C_1}\cdots\overline{C_k}) = N - \left[\sum_{i} N(C_i)\right] + \left[\sum_{i<j} N(C_i C_j)\right]$$

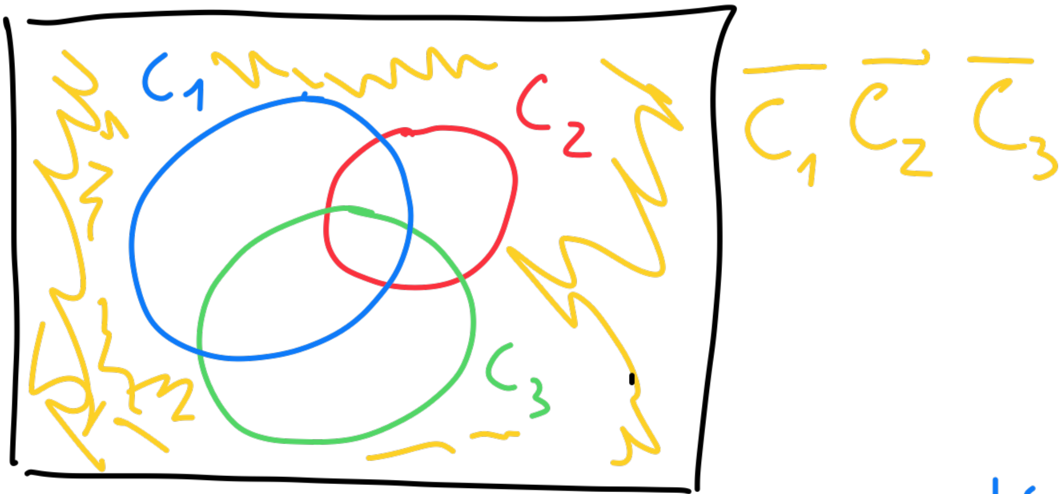
$$- \left[\sum_{i_1<i_2<i_3} N(C_{i_1} C_{i_2} C_{i_3})\right] + \cdots \pm \left[N(C_1 \cdots C_k)\right]$$

(suma de un solo término

Versión matemática full

$$N(\overline{C_1}\cdots\overline{C_k}) = N + \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell}\left[\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_\ell} N(C_{i_1}C_{i_2}\cdots C_{i_\ell})\right]$$

Fórmula para $k=3$ (visualizar)



$$N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}) = \overbrace{N}^{1\text{ término}} - \overbrace{\left[N(C_1)+N(C_2)+N(C_3)\right]}^{3\text{ términos}}$$

$$+\overbrace{\left[N(C_1C_2)+N(C_1C_3)+N(C_2C_3)\right]}^{3\text{ términos}}$$

$$-\overbrace{N(C_1C_2C_3)}^{1\text{ término}}$$

Las cantidades de términos son los números de combinaciones

Si tuviera $k=4$

$$N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}\,\overline{C_4}) = 1\text{ término} - [4\text{ términos}] + [6\text{ términos}] - [4\text{ términos}] + 1\text{ término}$$

Demostración del P.I.E.

Veamos que cada elemento del conjunto A está contado

- 1 vez si cumple $\bar{C}_1 \bar{C}_2 \cdots \bar{C}_k$
- 0 vez si cumple alguna de las C_i

- Si un elemento cumple $\bar{C}_1 \bar{C}_2 \cdots \bar{C}_k$, va a estar contado sólo en la N

- Si un elemento cumple exactamente 1 condición C_i, va a estar
  - sumado en la N
  - restado en $N(C_i)$

  $\Big\}$ 0

  y nada más

- Si un elemento cumple exactamente 2 condiciones C_i, C_j, va a estar

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \text{ sumado en } N \\ \cdot \text{ restado en } N(C_i) \text{ y } N(C_j) \\ \cdot \text{ sumado en } N(C_i C_j) \end{array}\right\} 1-2+1=0$$

y nada más

- Si un elemento cumple exactamente 3 condiciones $C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3}$, va a estar

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \text{ Sumado en } N \\ \cdot \text{ restando en } N(C_{i_1}), N(C_{i_2}), N(C_{i_3}) \\ \cdot \text{ sumando en } N(C_{i_1} C_{i_2}), N(C_{i_1} C_{i_3}), \\ \qquad N(C_{i_2} C_{i_3}) \\ \cdot \text{ restado en } N(C_{i_1} C_{i_2} C_{i_3}) \end{array}\right\} \begin{array}{c} 1-3+3-1 \\ \parallel \\ 0 \end{array}$$

y nada más

En general,

si un elemento cumple exactamente ℓ condiciones $C_{i_1} C_{i_2} \dots C_{i_\ell}$, va a aparecer

- sumado 1 vez
- restado $\ell = C(\ell,1)$ veces
- sumado $C(\ell,2)$ veces
- restado $C(\ell,3)$ veces

⋮

(sumado o restado según si ℓ es par o impar) $C(\ell,\ell)$ veces

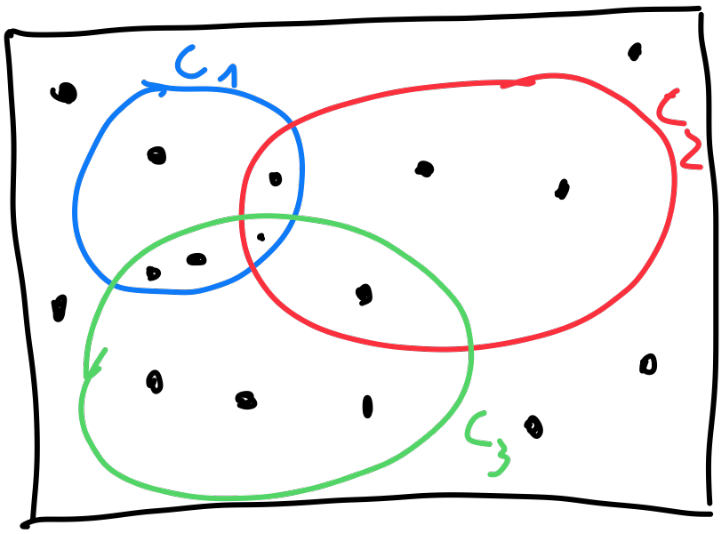
En total lo contamos estas veces:

$$C(\ell,0) + (-1)^1 C(\ell,1) + (-1)^2 C(\ell,2) +$$

$$+ \dots + C(\ell,j)(-1)^j + \dots + C(\ell,\ell)(-1)^\ell$$

$$= (1-1)^\ell = 0^\ell = 0$$

Binomio de Newton



$N = 16$

Verifiquemos ambos lados de la igualdad

$$N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}) = 5$$

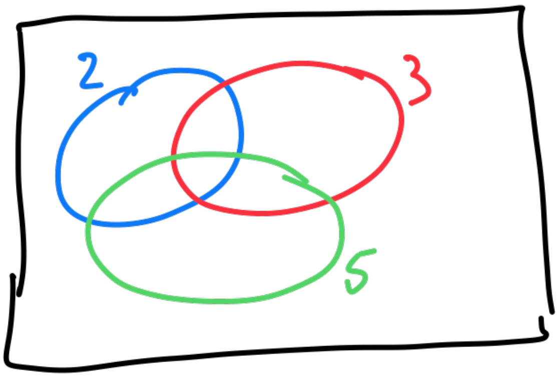
lado izquierdo

lado derecho.

$$\overset{16}{N} - \left[\overset{5}{N(C_1)} + \overset{5}{N(C_2)} + \overset{7}{N(C_3)}\right] + \left[\overset{2}{N(C_1C_2)} + \overset{2}{N(C_2C_3)} + \overset{3}{N(C_1C_3)}\right] - \overset{1}{N(C_1C_2C_3)}$$

$$= 16 - 17 + 7 - 1 = 5 \quad \checkmark$$

Ejemplo: ¿Cuántos números del 1 al 20 no son divisibles por $\underset{c_1}{2}$, $\underset{\tilde{c}_2}{3}$ ni $\underset{\tilde{c}_3}{5}$?



$N = 20$

$N(c_1) = 10 \qquad \frac{20}{2} = 10$

$N(c_2) = 6 \qquad \frac{20}{3} = 6..$

$N(c_3) = 4 \qquad \frac{20}{5} = 4$

C_1C_2 = múltiplo de 2 y de 3 = múltiplo de 6   3

C_1C_3 = " " 2 " " 5 = " " 10   2

C_2C_3 = " " 3 " " 5 = " " 15   1

$C_1C_2C_3$ = múltiplo de 30   0

$$N(\bar{C}_1\bar{C}_2\bar{C}_3) = N - [N(C_1) + N(C_2) + N(C_3)] + [N(C_1C_2) + N(C_1C_3) + N(C_2C_3)] - N(C_1C_2C_3)$$

$$= 20 - [10+6+4] + [3+2+1] - 0$$

$$= 20 - 20 + 6 = 6$$