Contando soluciones de ecuaciones enteras con condiciones en las variables

En la clase anterior, teníamos $n=4$ clases de comida distintas, y $r=10$ personas que van a comer

una comanda de cocina es decir cuántos platos de cada tipo se van a pedir.

Son 4 números naturales que sumados dan 10

$$x_1+x_2+x_3+x_4=10$$

La cantidad de comandas distintas que puede recibir la cocina es la cantidad de soluciones distintas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \quad , \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Lo abreviamos diciendo $x_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \geq 0$ $\forall i = 1,2,3,4$

En general, este número se llama combinaciones con repetición de n tomando r, CR^n_r, es la cantidad de soluciones de

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r \quad , \quad x_i \in \mathbb{Z}, \; x_i \geq 0$$

Calculamos que $CR^n_r = C^{r+n-1}_{n-1} = C^{r+n-1}_{r}$

¿Qué pasa si alguna(s) variable(s) tienen alguna condición?

Ejemplo: quiero saber cuántas comandas posibles de 10 personas hay, tales que al menos 3 platos sean de guiso

$x_1 = $ # Hamburguesas

$x_2 = $ # Pizzas

$x_3 = $ # Guisos

$x_4 = $ # Tartas

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, $x_i \in \mathbb{Z}$, pero

ahora $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 3$, $x_4 \geq 0$

Idea: Hago 3 guisos y después me fijo en los otros 7 platos

Cambio la variable x_3 por la variable $x'_3 = x_3 - 3$

= # guisos que tengo que hacer además de los 3 que hay que hacer sí o sí.

Entonces, sacando esos 3 guisos seguros, (en ambos lados)

$$x_1 + x_2 + (x_3 - 3) + x_4 = 10 - 3 = 7$$

$$x_3 \geq 3 \Rightarrow x'_3 \geq 0$$

La ecuación queda

$$x_1 + x_2 + x'_3 + x_4 = 7 \qquad \begin{array}{l} x_1, x_2, x'_3, x_4 \in \mathbb{Z} \\ x_1, x_2, x'_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

La cantidad de soluciones de esta ecuación es

$$CR^4_7 = C^{7+3}_{\underset{4-1}{3}} = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

obs: vale para restringir cualquiera de las variables (una o más) por abajo (mayor o igual que algo)

Ej: Hay remeras de tamaños

(*) XS, S, M, L, XL (5 tamaños)

¿cuántos pedidos de 108 remeras distintos puedo hacer con estas condiciones? (*)

$x_1 = $ # Remeras XS

$x_2 = $ # Remeras S

$x_3 = $ # Remeras M

$x_4 = $ # Remeras L

$x_5 = $ # Remeras XL

(*) $x_1 \geq 2, \; x_2 \geq 1, \; x_3 \geq 6, \; x_4 \geq 3, \; x_5 \geq 5$

Defino

$x'_1 = x_1 - 2, \; x'_2 = x_2 - 1, \; x'_3 = x_3 - 6, \; x'_4 = x_4 - 3, \; x'_5 = x_5 - 5$

$$(x_1 - 2) + (x_2 - 1) + (x_3 - 6) + (x_4 - 3) + (x_5 - 5) = 108$$

$$-2-1-6-3-5$$

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 = 91$$

La cantidad de soluciones es

$$CR^5_{91} = C^{91+4}_4 = \frac{95!}{91!\,4!} = \frac{95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 114.607.620$$

Supongamos ahora que hay un pedido de 108 camisas XS, S, M, L, XL

Pero como máximo puedo hacer 100 camisas XS

Entonces tengo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 108 \qquad x_i \in \mathbb{Z}, \quad x_i \geq 0, \quad x_1 \leq 100$$

Por la regla de la suma:

$$\overset{N}{\#\{\text{soluciones}\}} = \overset{N'}{\#\{\text{soluciones donde } x_1 \leq 100\}} + \overset{N''}{\#\{\text{soluciones donde } \underbrace{x_1 > 100}_{x_1 \geq 101}\}}$$

$x_1' = x_1 - 101$

Quiero saber N'

Sé: $N = CR^5_{108}$, $N'' = CR^5_{108-101}$

Entonces $N' = N - N'' = CR^5_{108} - CR^5_7$

¿Qué pasa si tenemos más condiciones de $\underbrace{\text{estas}}_{}$?

condiciones que son las contrarias de las que sé calcular

Por ejemplo, la cantidad de camisas S no puede ser más de 5

El problema ahora es:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 108$$

$$x_i \in \mathbb{Z}, \ x_i \geq 0$$

$$x_1 \leq 100$$

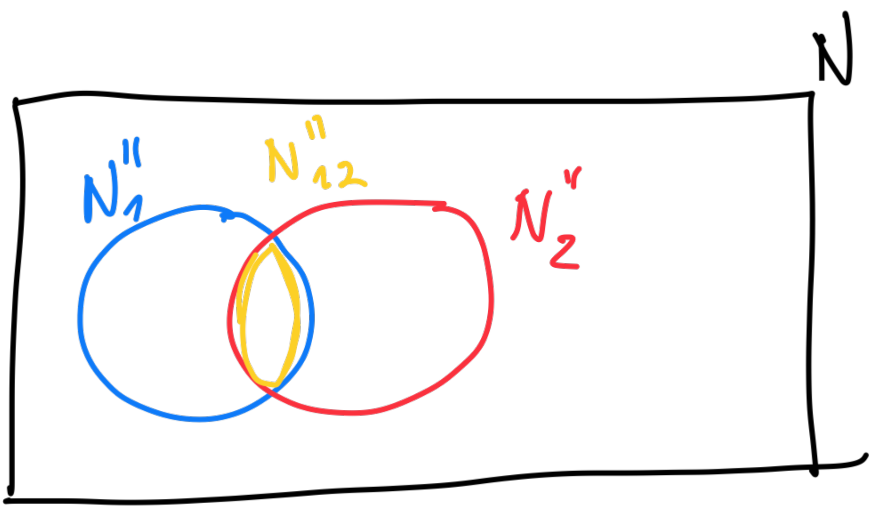
$$x_2 \leq 5$$

Sabemos calcularlo con las condiciones opuestas ($x_i \geq$ algo)

$N = \#\{\text{soluciones}\}$

$N_1'' = \#\{\text{soluciones con } x_1 \geq 101\}$

$N_2'' = \#\{\text{soluciones con } x_2 \geq 6\}$



conjunto de todas las soluciones

No vale la regla de la suma,

si sumo $N_1'' + N_2''$, conté dos veces a las soluciones que cumplen las dos condiciones a la vez.

Pero esas también las sé contar, entonces las resto

$N_{12}'' = \#\{\text{soluciones con } x_1 \geq 101 \text{ y } x_2 \geq 6\}$

$$N = CR^{5}_{108}$$

$108-101=7$

$108-6=102$

$108-101-6=1$

$$N''_1 = CR^{5}_{7} \,,\; N''_2 = CR^{5}_{102}$$

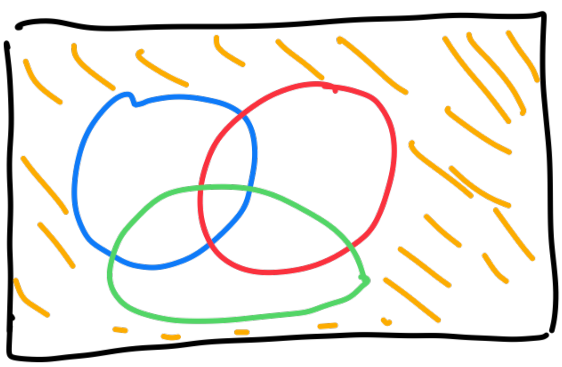
$$N''_{12} = CR^{5}_{1}$$

Entonces la solución es

$$N' = N - (N''_1 + N''_2 - N''_{12})$$

$$N - N''_1 - N''_2 + N''_{12}$$

Si ahora tuviera una tercera restricción: $x_3 \leq 10$



Total

3 conjuntos

3 intersecciones de a dos

1 intersección de a 3

$C_1: x_1 \geq 101$

$C_2: x_2 \geq 6$

$C_3: x_3 \geq 11$

El número que queremos va a ser $\#\{\text{no } C_1 \text{ y no } C_2 \text{ y no } C_3\}$

$$= \#\{\text{total}\} - \left(\#\{C_1\} + \#\{C_2\} + \#\{C_3\}\right)$$

$$+ \left(\#\{C_1 \text{ y } C_2\} + \#\{C_1 \text{ y } C_3\} + \#\{C_2 \text{ y } C_3\}\right)$$

$$- \#\{C_1 \text{ y } C_2 \text{ y } C_3\}$$

$$= CR^5_{108} - \left(CR^5_{108-101} + CR^5_{108-6} + CR^5_{108-11}\right)$$

$$+ \left(CR^5_{108-101-6} + 0 + CR^5_{108-6-11}\right)$$

$108-101-11<0$

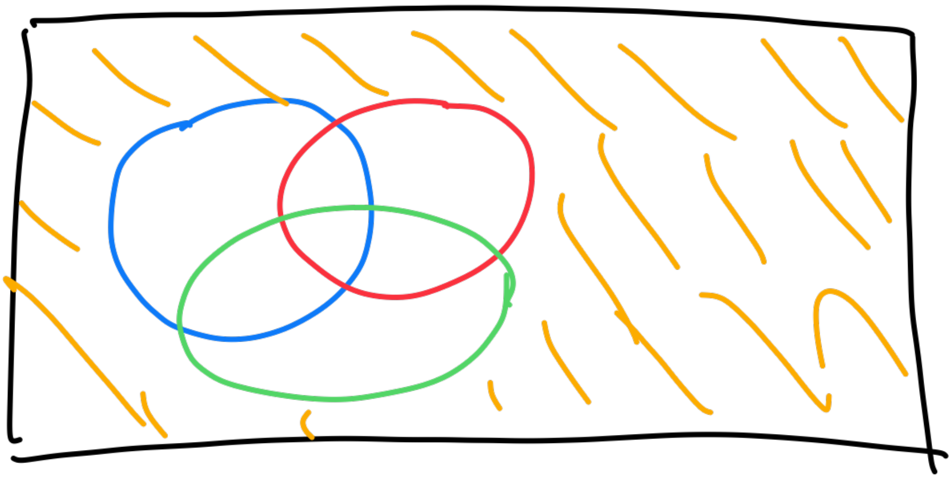
$- 0$

$108-101-6-11<0$

Esta forma de contar se llama

$\boxed{\text{Principio de Inclusión-Exclusión (P.I.E.)}}$

<u>Ejemplo</u>: ¿Cuántas personas hay en el curso, que no son docentes, y su nombre no empieza con J, y su apellido no empieza con C?



C_1: Docentes

C_2: Nombre empieza con J

C_3: Apellido empieza con C

- $\#\{\text{no } c_1 \text{ y no } c_2 \text{ y no } c_3\}$

$$= \#\{\text{total}\} - \{\#\{c_1\} + \#\{c_2\} + \#\{c_3\}\}$$
$$+ \{\#\{c_1 \text{ y } c_2\} + \#\{c_1 \text{ y } c_3\} + \#\{c_2 \text{ y } c_3\}\}$$
$$- \#\{c_1 \text{ y } c_2 \text{ y } c_3\}$$

$$= 1932 - \{8 + 195 + 223\}$$
$$+ \{2 + 2 + 25\}$$
$$- 1$$

$$= 1534$$