Aplicaciones de los coeficientes multinomiales, o permutaciones con repetición: coeficientes en potencias de polinomios (en una o varias variables)

1) Tengo $(3x+2y+z)^5$ y quiero saber el coeficiente de $x^2 y^1 z^2$ sin desarrollar

$a = 3x$, $b = 2y$, $c = z$

el coeficiente de $x^2 y^1 z^2$ va a venir de $a^2 b^1 c^2$

Este coeficiente es $\frac{5!}{2!\,1!\,2!}$

El término es

$$\frac{5!}{2!\,1!\,2!}\, a^2 b^1 c^2 = \frac{5!}{2!\,1!\,2!} (3x)^2 + (2y)^1 + z^2$$

$$= \frac{5!}{2!\,1!\,2!}\, 3^2 \cdot 2^1 \cdot 1^2 \; x^2 y^1 z^2$$

El coeficiente es: $\frac{120}{4} \cdot 9 \cdot 2 = 60 \cdot 9 = \underline{\underline{540}}$

---

(2) Tengo la expresión $(2x+3x^2)^4$ y quiero saber el coeficiente de x^6 sin desarrollar todo

$a = 2x$, $b = 3x^2$ ¿Cómo obtengo x^6?

La única forma es $a^2 b^2 = (2x)^2 (3x^2)^2 = 2^2 3^2 x^6$

Coef. de $a^2 b^2$ en $(a+b)^4$ es $\frac{4!}{2!\,2!}$.

$\Rightarrow$ coef de $x^6 = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot 2^2 \cdot 3^2 = \underline{\underline{36}}$

③ Quiero hallar el coeficiente de $x^2 y^2$ en $(\underset{a}{1}+\underset{b}{x}-\underset{c}{2x^2}+\underset{d}{4y}\underset{e}{-3xy})^5$

$a=1$, $b=x$, $c=-2x^2$, $d=4y$, $e=-3xy$

Puedo formar x^2y^2 con (siempre 5 factores)

Potencia	Coef.		Coef. en x^2y^2
$d\,e\,b\,a^2$	$\frac{5!}{1!\cdot1!\cdot1!\cdot2!}$	A	$\frac{5!}{1!\cdot1!\cdot1!\cdot2!}\,4(-3)\cdot1\cdot1^2$
d^2b^2a	$\frac{5!}{2!\cdot2!\cdot1!}$	B	$\frac{5!}{2!\cdot2!\cdot1!}\,4^2\cdot1^2\cdot1$
$d^2c\,a^2$	$\frac{5!}{2!\cdot1!\,2!}$	C	$\frac{5!}{2!\cdot1!\,2!}\,4^2(-2)\,1^2$
e^2a^3	$\frac{5!}{2!\,3!}$	D	$\frac{5!}{2!\,3!}\,(-3)^2\,1^3$

Tengo que sumar todos estos

$$\underset{A}{60(-12)}+\underset{B}{30\cdot16}+\underset{C}{30(-32)}+\underset{D}{10(9)}=$$

$$=30(-24+16-32)+90=30(-24+16-32+3)=30(-37)$$
$$=111$$

Combinaciones con repetición

Restaurante: camarero/a toma pedidos de un cierto menú

- Hamburguesa
- Pizza
- Tarta
- Guiso

Tiene que saber a quién le sirve cada cosa

Si van 10 personas, tiene que saber a quién le da cada plato

¿Cuántos pedidos distintos se pueden hacer

Mateo	Guiso	Matías	Hamburguesa
Juan	Guiso	Richard	Guiso
Jose	Guiso	Mathias	Pizza
Fabio	Guiso	Eaten	Pizza
Ignacio	Guiso	Jorge	Tarta

Si las personas son distinguibles
los platos son distinguibles
no importan las cantidades,
por la regla del producto hay

4^{10} pedidos diferentes

Ahora, en la cocina no les
importa quién pidió cada cosa,
sólo la cantidad (comanda)

En el ejemplo: 1 Hamburguesa
2 Pizzas
1 Tarta
6 Guisos

¿Cómo calculamos la cantidad de comandas distintas que pueden recibir en la cocina?

Este número se llama combinaciones con repetición de 4 tomadas de a 10

$CR(4,10)$ o CR_{10}^{4}

(acá el número de abajo puede ser mayor que el de arriba)

Es lo mismo que tener 4 números naturales distintos

$x_1 = \#H$, $x_2 = \#P$, $x_3 = \#G$, $x_4 = \#T$

y encontrar todas las soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

Ejemplos : 1H, 2P, 6G, 1T

10 G   8 H, 1G, 1T

9 H, 1 P ,   5H, 1P, 2G, 2T

Una posible solución es agarrar 3 barreras (porque quiero separar 4 tipos de platos) e intercalarlas entre los platos

Ejemplo

10 platos O

1H 2P 6G 1T

O|OO|OOOOOO|O

A cada forma de intercalar barreras entre los platos le corresponde una comanda distinta

8 H, 1P, 1G, 0T

0 0 0 0 0 0 0 0 | 0 | 0 |

En cada espacio (o momento), puedo servir el plato o cambiar de bandeja)

5 H, 1P, 2G, 2T

0 0 0 0 0 | 0 | 0 0 | 0 0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Tengo $10+3 = 13$ lugares y tengo que elegir dónde pongo las barreras

La cantidad total es $C^{10+3}_{3=4-1}$

En general, la cantidad de soluciones naturales (≥ 0) de

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ es

$$CR^n_r = C^{n+r-1}_{n-1} = C^{n+r-1}_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$$