

Aplicaciones de los
coeficientes multinomiales,
o permutaciones con repetición:
coeficientes en potencias
de polinomios (en una o
varias variables)

1) Tengo $(3x + 2y + z)^5$ y

quiero saber el coeficiente

de $x^2 y^1 z^2$ sin desarrollar

$$a = 3x, \quad b = 2y, \quad c = z$$

el coeficiente de $x^2 y^1 z^2$

va a venir de $a^2 b^1 c^2$

Este coeficiente es $\frac{5!}{2!1!2!}$

El término es

$$\frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!} a^2 b^1 c^2 = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!} (3x)^2 (2y)^1 z^2$$

$$= \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!} 3^2 \cdot 2^1 \cdot 1^2 x^2 y^1 z^2$$

El coeficiente es: $\frac{120}{4} \cdot 9 \cdot 2 = 60 \cdot 9 = \underline{\underline{540}}$

② Tengo la expresión $(2x + 3x^2)^4$ y quiero saber el coeficiente de x^6 sin desarrollar todo

$a = 2x$, $b = 3x^2$. ¿Cómo obtengo x^6 ?

La única forma es $a^2 b^2 = (2x)^2 (3x^2)^2 = 2^2 3^2 x^6$

Coef. de $a^2 b^2$ en $(a+b)^4$ es $\frac{4!}{2! \cdot 2!}$.

$$\Rightarrow \text{Coef de } x^6 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 2^2 \cdot 3^2 = \underline{\underline{36}}$$

③ Quiero hallar el coeficiente de $x^2 y^2$ en $(1+x-2x^2+4y-3xy)^5$

$a=1, b=x, c=-2x^2, d=4y, e=-3xy$

Puedo formar $x^2 y^2$ con (siempre 5 factores)

<u>Potencia</u>	<u>Coef.</u>	<u>Coef. en $x^2 y^2$</u>
$d e b a^2$	$\frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!}$	A $\frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} 4(-3) \cdot 1 \cdot 1^2$
$d^2 b^2 a$	$\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!}$	B $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} 4^2 \cdot 1^2 \cdot 1$
$d^2 c a^2$	$\frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!}$	C $\frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!} 4^2 (-2) 1^2$
$e^2 a^3$	$\frac{5!}{2! \cdot 3!}$	D $\frac{5!}{2! \cdot 3!} (-3)^2 1^3$

Tengo que sumar todos estos \uparrow

$60(-12) + 30 \cdot 16 + 30(-32) + 10(9) =$
 $= 30(-24 + 16 - 32 + 3) = 30(-37) = -1110$

Combinaciones con repetición

Restaurante: camarero/a toma pedidos de un cierto menú ↓

- Hamburguesa
- Pizza
- Tarta
- Guiso

Tiene que saber a quién le sirve cada cosa

Si van 10 personas, tiene que saber a quién le da cada plato
¿ Cuántos pedidos distintos se pueden hacer

Mateo	Guiso
Juan	Guiso
Jose	Guiso
Fabio	Guiso
Ignacio	Guiso

Matias	Hamburguesa
Richard	Guiso
Mathias	Pizza
Eaten	Pizza
Jorge	Tarta

Si las personas son distinguibles,
los platos son distinguibles,
no importan las cantidades,
por la regla del producto hay

4^{10} pedidos diferentes

Ahora, en la cocina no les
importa quién pidió cada cosa,
sólo la cantidad (comanda)

En el ejemplo: 1 Hamburguesa

2 Pizzas

1 Tarta

6 Guisos

- ¿Cómo calculamos la cantidad de comandos distintos que pueden recibir en la ocina?

Este número se llama combinaciones con repetición de 4 tomadas de a 10

$$CR(4, 10) \text{ o } CR_{10}^4$$

(acá el número de abajo puede ser mayor que el de arriba)

Es lo mismo que tener 4 números naturales distintos

$$x_1 = \# H, x_2 = \# P, x_3 = \# G, x_4 = \# T$$

y encontrar todas las soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

Eje mpls : 1H, 2P, 6G, 1T

10 G

8 H, 1G, 1T

9 H, 1P

5 H, 1P, 2G, 2T

Una posible solución es
agarrar 3 barreras (porque
quiero se para 4 tipos de platos)
e intercalarlas entre los platos

Ejemplo

1H 2P

6G

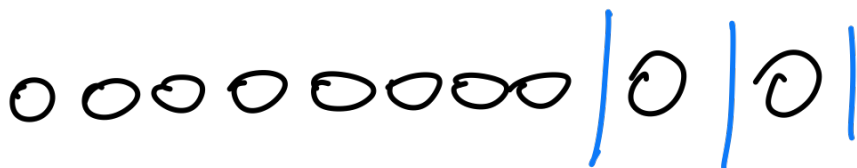
10 platos 0

1T

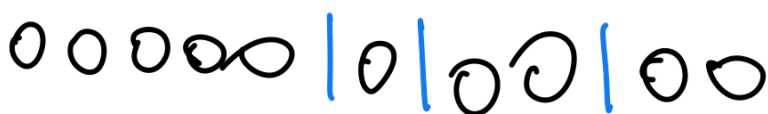
0|00|000000|0

A cada forma de intercalar
barreras entre los platos le
corresponde una comanda distinta

3 H, 1P, 1G, 0T



5 H, 1P, 2G, 2T



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Temp $10 + 3 = 13$ lugares y

Temp que elegir donde poner las barreras

La cantidad total es $C_{10+3}^3 = 4-1$

En general, la cantidad de soluciones naturales (≥ 0) de

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r \text{ es}$$

$$C_{r+n}^n = C_{n-1}^{n+r-1} = C_r^{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! r!}$$

En cada espacio (o momento), puedo servir el plato o cambiar de bandeja

